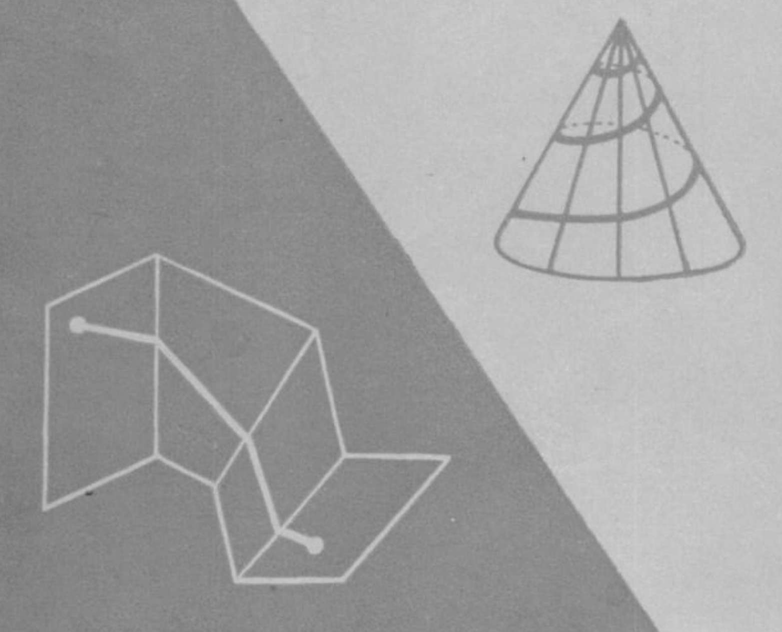
L. A. LUSTERNIK

KÜRZESTE LINIEN



DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN



L. A. LUSTERNIK

KÜRZESTE LINIEN

KÜRZESTE LINIEN

Eine Einführung in die Variationsrechnung

VON

L. A. LUSTERNIK

1957

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. H. KARL, POTSDAM

Популярные лекции по математике
Выпуск 19

Л. А. Люстерник, Кратчайшие линии

Гостехиздат, Москва 1955

Übersetzung aus dem Russischen: Dipl.-Math. Gerhard Tesch
Verantwortlicher Verlagsredakteur: Ludwig Boll

Printed in Germany
Lizenz-Nr. 206 · 435/20/57
Satz und Druck: (IV/5/1) Buchdruckerei Paul Dünnhaupt,
Köthen (Anh.) L 94/57

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung

In diesem Bändchen wird vom elementaren Standpunkt aus eine Reihe von Aufgaben der sogenannten Variationsrechnung behandelt. Es werden Größen untersucht, die von einer Kurve abhängen, wobei diejenige Kurve gesucht wird, für welche diese Größen ihren kleinsten oder ihren größten Wert annehmen. Dieser Art sind z. B. die Aufgaben, unter allen Kurven, welche zwei Punkte einer bestimmten Fläche verbinden, die kürzeste (auf der Fläche liegende) zu ermitteln, oder in einer Ebene unter allen geschlossenen Kurven gegebener Länge diejenige zu finden, welche die größte Fläche umschließt, usw.

Der Stoff dieses Buches entspricht im wesentlichen meinen Vorträgen vor einem mathematischen Zirkel der Moskauer Staatlichen Universität. Der Inhalt des ersten Teils (die Paragraphen 1–10) lehnt sich eng an den Inhalt meiner 1940 erschienenen Broschüre „Geodätische Linien“ an.

Beim Leser werden lediglich Kenntnisse aus der Elementarmathematik vorausgesetzt. Die ersten Kapitel besitzen vollständig elementaren Charakter; in den anderen, die ebenfalls keine speziellen Kenntnisse verlangen, wird allerdings etwas größere Vertrautheit mit mathematischen Gedankengängen vorausgesetzt.

Der ganze Inhalt des Büchleins kann als elementare Einführung in die Variationsrechnung angesehen werden. Die Variationsrechnung, deren Aufgabe die systematische Bestimmung der Extremwerte (Maxima und Minima) von sogenannten *Funktionalen* ist, wird in den ersten Vorlesungen über „Höhere Mathematik“, wie sie etwa an technischen Lehranstalten gehalten werden, nicht behandelt. Ich bin jedoch der Meinung, daß es auch für den Anfänger in der „Höheren Mathematik“ nichts schadet, den Blick nach vorn zu richten.

Dem mit den Elementen der Analysis vertrauten Leser wird es wenig Mühe kosten, einige Definitionen und Überlegungen, die in diesem Bändchen nicht exakt dargestellt werden, selbst mathematisch sauber zu formulieren. Dazu mögen die kleingedruckten Erläuterungen Hinweise geben. So sollte man z. B. nicht von „kleinen Größen" und ihrer „angenäherten Gleichheit", sondern von infinitesimalen Größen und ihrer Äquivalenz sprechen. Läßt jedoch einen anspruchsvolleren Leser das Maß an Strenge und logischer Präzision der Behandlung unbefriedigt, so möge er daran die Notwendigkeit einer sauberen Herausarbeitung der Grundbegriffe der Analysis erkennen, wie sie ihm z. B. in den Anfängervorlesungen an der Universität entgegentritt. Ohne diese ist nämlich eine exakte und systematische Behandlung eines Kapitels der Analysis, wie es die Variationsrechnung darstellt, unmöglich.

Die Analysis hat mächtige Hilfsmittel ausgearbeitet, die viele schwierige Aufgaben manchmal automatisch zu lösen gestatten. Jedoch ist es bei jedem Stand des mathematischen Wissens außerordentlich wichtig, die einfache geometrische oder physikalische Bedeutung eines Problems zu erfassen. Man muß auch, wie die Mathematiker sagen, Aufgaben „über den Daumen" zu lösen verstehen, d. h. eine vielleicht nicht strenge, aber einfache und anschauliche Begründung finden können.

Wenn dieses Büchlein bei dem Leser auch nur einigermaßen zur Entwicklung dieser Elemente des mathematischen Denkens beitragen könnte, so hielte sein Verfasser die bei der Zusammenstellung aufgewandte Mühe für ausreichend belohnt.

KAPITEL I

KÜRZESTE LINIEN AUF EINFACHEN FLÄCHEN

§ 1. Kürzeste Linien auf einfachen Polyederflächen

1. Die kürzeste Linie auf einem Zweiflach. Die kürzeste Verbindungslinie zweier auf einer Ebene liegenden Punkte ist bekanntlich die Gerade, die durch diese Punkte hindurchgeht.

Betrachten wir jetzt zwei Punkte A und B auf einer beliebigen Fläche. Man kann sie durch unendlich viele verschiedene Linien, die auf dieser Fläche liegen, miteinander verbinden. Aber welche dieser Linien ist nun die kürzeste? D. h., wie muß man sich auf der Fläche bewegen, um auf dem kürzesten Wege vom Punkt A zum Punkt B zu gelangen?

Wir beginnen mit der Lösung dieser Aufgabe für einfache Flächen.

Gegeben seien zunächst zwei sich unter einem bestimmten Winkel schneidende Ebenen Q_1 und Q_2. Die Scheitelkante dieses sogenannten Zweiflachs sei die Gerade MN.[1]) Auf seinen beiden Seitenflächen befinden sich zwei Punkte: A auf Q_1 und B auf Q_2 (Abb. 1). Die Punkte A und B können durch unendlich viele verschiedene Linien, die alle auf den Ebenen Q_1 und Q_2 des Zweiflachs liegen, miteinander verbunden werden. Es ist die kürzeste dieser Linien zu finden.

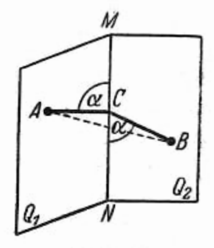


Abb. 1.

Wäre der Winkel zwischen den Ebenen gleich zwei Rechten (180°), so würden die beiden Ebenen eine einzige Ebene bilden, und die gesuchte kürzeste Verbindungslinie der Punkte A und B wäre die Gerade AB. Ist jedoch der Winkel zwischen den Ebenen von 180° verschieden, so liegt die Verbindungsgerade AB nicht in diesen Ebenen. Wir klappen nun das Zweiflach zu einer Ebene auf, indem wir die eine der Ebenen um die Gerade MN drehen

[1]) In Abb. 1 ist nur ein Teil des unendlich ausgedehnten Zweiflachs dargestellt.

(Abb. 2). Die Ebenen Q_1 und Q_2 gehen dabei in zwei Halbebenen Q_1' und Q_2' über. Die Gerade MN wird zur Geraden $M'N'$, der Trennungslinie von Q_1' und Q_2', die Punkte A und B gehen in die Punkte A' und B' über (A' auf Q_1', B' auf Q_2'), während jeder in den Ebenen des Zweiflachs liegenden Verbindungslinie der Punkte A und B eine gleichlange Verbindungskurve der Punkte A' und B' in unserer Ebene entspricht. Insbesondere geht die kürzeste Kurve zwischen A' und B' auf dem Zweiflach in die kürzeste Verbindung der Punkte A und B in der entstandenen Ebene über, d. h. in die Gerade $A'B'$. Diese schneidet die Gerade $M'N'$ in einem bestimmten Punkt C', wobei die Winkel $A'C'M'$ und $N'C'B'$ als Scheitelwinkel gleich sind (Abb. 2). Wir bezeichnen die beiden Größen mit α.

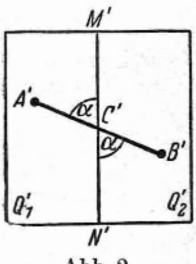


Abb. 2.

Nun drehen wir die Ebenen Q_1' und Q_2' soweit um $M'N'$, daß wir wieder das ursprüngliche Zweiflach erhalten. Die Halbebenen Q_1' und Q_2' gehen wieder in die Ebenen Q_1 und Q_2 des Zweiflachs über, $M'N'$ wird zur Scheitelkante MN, die Punkte A' und B' gehen in die Punkte A (auf Q_1) und B (auf Q_2) über, während die Gerade $A'B'$ zur kürzesten auf dem Zweiflach liegenden Verbindungslinie der Punkte A und B wird. Diese kürzeste Verbindung ist offenbar der Streckenzug ACB, wobei die Strecke AC auf Q_1, die Strecke CB auf Q liegt. Offenbar sind die Winkel ACM und NCB, in welche die miteinander übereinstimmenden Winkel $A'C'M'$ und $N'C'B'$ übergegangen sind, ebenfalls gleich α. Somit gilt:

Die kürzeste Verbindung zweier auf den beiden Ebenen eines Zweiflachs liegenden Punkte A und B, die in diesen beiden Ebenen liegt, ist der im Punkt C der Scheitelkante MN geknickte Streckenzug ACB, wobei die Winkel ACM und NCB, die von den beiden Strecken des Streckenzuges und der Scheitelkante gebildet werden, einander gleich sind.

Die behandelte Aufgabe wird manchmal scherzhaft formuliert. Eine Fliege will von einem Punkt A auf einer Wand zu einem Punkt B, der auf einer anstoßenden Wand liegt, kriechen. Wie muß sie sich auf den Wänden bewegen, um auf dem kürzesten Wege vom Punkt A zum Punkt B zu gelangen?

2. Die kürzeste Linie auf einer Polyederfläche. Wir gehen jetzt zur Behandlung einiger komplizierterer Fälle über. Gegeben sei

eine Polyederfläche (Abb. 3), die aus den Seitenflächen Q_1, Q_2, $Q_3, \ldots, Q_n$ mit den Kanten M_1N_1, M_2N_2, $M_3N_3, \ldots, M_{n-1}N_{n-1}$ besteht (in Abb. 3 ist $n = 4$). Auf zwei verschiedenen Seitenflächen oder kürzer gesagt, Seiten der Polyederfläche (z. B. auf Q_1 und Q_4) seien die Punkte A und B gegeben. Es ist die kürzeste auf der Polyederfläche liegende Verbindungslinie der Punkte A und B zu finden. Sie möge sich über die Ebenen Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 erstrecken. Wir klappen den Teil der Polyederfläche, der aus diesen Ebenenstücken besteht, zu einer Ebene auf (Abb. 4). Dabei gehen die Seiten in die Vielecke Q_1', Q_2', Q_3' und Q_4' dieser Ebene über. Die Kanten M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, in denen die Seitenflächen Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 aneinanderstießen, werden zu den Seitenlinien $M_1'N_1'$, $M_2'N_2'$, $M_3'N_3'$ der Vielecke Q_1', Q_2', Q_3' und Q_4', in welchen diese jetzt aneinander grenzen. Die Punkte A und B gehen in zwei Punkte A' und B' der Ebene über, während ihre Verbindungskurven beim Aufklappen in Verbindungskurven der Punkte A'

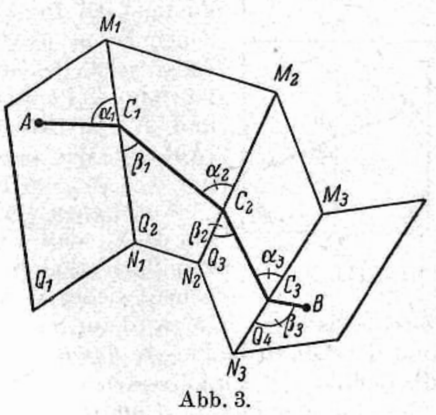


Abb. 3.

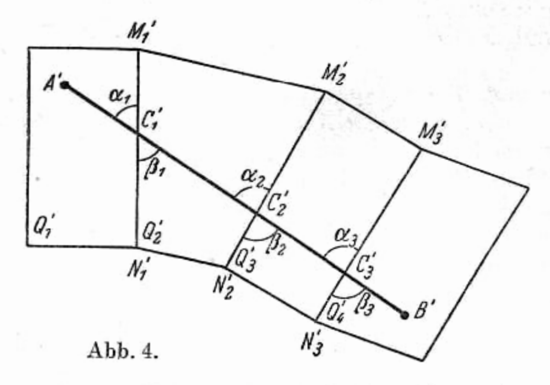


Abb. 4.

und B' übergehen. Die kürzeste Verbindungskurve der Punkte A und B geht in die kürzeste Verbindungskurve der Punkte A' und

B' in der Ebene über, d. h. in die Gerade $A'B'$.[1]) Von nun ab wiederholen sich die obigen Überlegungen. Die Scheitelwinkel α_1 und β_1, die die Gerade $A'B'$ mit der Vieleckseite $M_1'N_1'$ bildet, sind einander gleich. Ebenso stimmen die Scheitelwinkel α_2 und β_2, α_3 und β_3, die die Gerade $A'B'$ mit den Vieleckseiten $M_2'N_2'$ und $M_3'N_3'$ bildet, paarweise miteinander überein (Abb. 4).

Wird nun der Teil der Ebene, den unsere Vielecke darstellen, wieder in die ursprüngliche Polyederfläche übergeführt, so daß die Vielecke in die Seiten übergehen (Q_1' in die Seite Q_1, Q_2' in die Seite Q_2, Q_3' in die Seite Q_3 und endlich Q_4' in die Seite Q_4), so gehen die Punkte A' und B' in die Punkte A und B über. Die Gerade $A'B'$ wird zu derjenigen Linie AB, welche die kürzeste aller auf der Polyederfläche gelegenen Verbindungskurven der Punkte A und B ist. Die kürzeste Verbindung ist demnach der Streckenzug, dessen Ecken auf den Kanten M_1N_1, M_2N_2 und M_3N_3 der Polyederfläche liegen. Die Winkel α_1 und β_1 (ebenso α_2 und β_2, α_3 und β_3), die von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern des Streckenzuges und der entsprechenden Polyederkante gebildet werden, sind einander gleich.

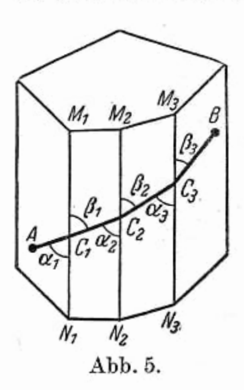


Abb. 5.

3. Die kürzeste Linie auf dem Mantel eines Prismas. In Abb. 5 ist ein Prisma[2]) dargestellt, wobei die kürzeste Verbindung zweier auf verschiedenen Seitenflächen des Prismas gelegenen Punkte A und B eingezeichnet ist, und zwar stellt der Streckenzug mit den Ecken C_1, C_2 und C_3 auf den Kanten des Prismas die kürzeste Verbindung dar. Hierbei sind jeweils die Winkel, zwischen angrenzenden Gliedern des Streckenzuges und derjenigen Kante, auf der ihr gemeinsamer Punkt liegt, auf Grund früherer Überlegungen einander gleich:

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \beta_3, \ldots .$$

Außerdem gilt

$$\beta_1 = \alpha_2$$

---

[1]) Der Fall, daß $A'B'$ andere Seiten des Vielecks schneidet, bleibt hier unberücksichtigt.

[2]) Die Seitenflächen des Prismas hat man sich nach oben und unten unbegrenzt fortgesetzt vorzustellen.

als Beziehung zwischen Wechselwinkeln an den Parallelen M_1N_1 und M_2N_2 und der Geraden C_1C_2.

Ebenso gilt auch

$$\beta_2 = \alpha_3.$$

Hieraus folgt

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \ldots.$$

Die Winkel, die von den einzelnen Strecken des kürzesten Streckenzuges AB auf dem Prisma und den Kanten gebildet werden, sind einander gleich.

4. Die kürzeste Linie auf dem Mantel einer Pyramide. Auf zwei Seitenflächen einer Pyramide[1]) mit der Spitze O seien zwei Punkte A und B gegeben (Abb. 6). Diese Punkte lassen sich auf dem Mantel der Pyramide durch unendlich viele Kurven miteinander verbinden, unter denen die kürzeste Verbindung AB durch einen Streckenzug dargestellt wird, dessen Ecken $C_1, C_2, C_3, \ldots$ auf den Kanten der Pyramide liegen. Wir wissen, daß die Winkel α_1 und β_1, α_2 und β_2, α_3 und $\beta_3, \ldots$, die von den einzelnen Strecken des Streckenzuges und den Kanten der Pyramide gebildet werden, paarweise miteinander übereinstimmen,

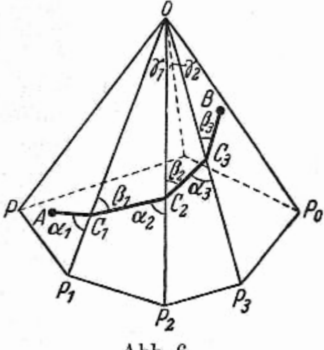


Abb. 6.

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \beta_3,\ \ldots.$$

Untersuchen wir nun die Seitenfläche P_1OP_2, auf der das Glied C_1C_2 des Streckenzuges liegt. Bezeichnen wir den Winkel P_1OP_2 mit γ_1, so ist der Winkel α_2 Außenwinkel des Dreiecks C_1OC_2, und die Winkel β_1 und γ_1 sind Innenwinkel desselben Dreiecks. Da der Außenwinkel eines Dreieckes gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel ist, folgt

$$\alpha_2 = \beta_1 + \gamma_1 \quad \text{oder} \quad \alpha_2 - \beta_1 = \gamma_1.$$

Da aber $\beta_1 = \alpha_1$ ist, gilt auch $\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma_1$. Analog hierzu gilt $\alpha_3 - \alpha_2 = \gamma_2$, wobei γ_2 der Spannwinkel zwischen den beiden benachbarten Kanten OP_2 und OP_3 an der Pyramidenspitze ist, usw.

[1]) Die Seitenflächen der Pyramide muß man sich nach unten unbegrenzt fortgesetzt denken.

Auf diese Weise folgt: *Die Differenz der Winkel, unter denen die kürzeste Verbindungslinie zwei Pyramidenkanten schneidet, ist gleich dem entsprechenden Spannwinkel an der Spitze der Pyramide.*

§ 2. Kürzeste Linien auf einem Zylindermantel

1. Die kürzeste Linie auf einem Zylindermantel. Wir wollen uns im folgenden mit der Ermittlung der kürzesten Linien auf einfachen krummen Flächen beschäftigen.[1] Zunächst betrachten wir die Mantelfläche eines Kreiszylinders (Abb. 7).

Erinnern wir uns einleitend, daß man den Mantel eines Zylinders durch ein System gerader Linien bedecken kann, die zur Zylinderachse und daher auch untereinander parallel sind. Diese Geraden heißen *Erzeugende* oder Mantellinien des Zylinders.

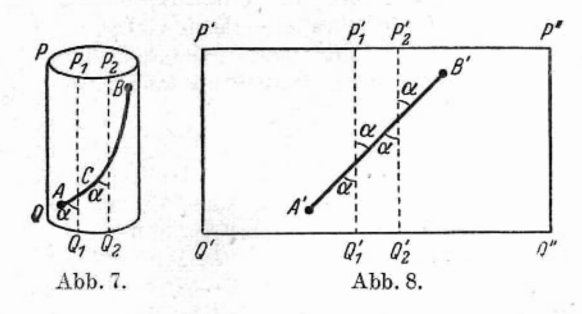


Abb. 7. Abb. 8.

Auf einem Zylindermantel seien nun zwei Punkte A und B gegeben. Wir wollen unter allen Kurven, die die Punkte A und B miteinander verbinden und auf dem Zylindermantel liegen, diejenige ermitteln, welche die kleinste Länge besitzt. Wir bezeichnen diese kürzeste Verbindung der Punkte A und B mit $\overset{\frown}{AB}$. Zuerst betrachten wir den Fall, daß A und B nicht auf ein und derselben Mantellinie liegen.

Schneiden wir den Zylindermantel längs einer bestimmten Mantellinie PQ, die $\overset{\frown}{AB}$ nicht schneidet, auf und wickeln ihn in eine Ebene ab, so erhalten wir ein Rechteck (Abb. 8). Zwei Rechteckseiten, $P'P''$ und $Q'Q''$, entstehen bei der Abwicklung der Kreislinien, die die Mantelfläche des Zylinders begrenzen, das

[1] Der hier betrachtete endliche Zylindermantel (Abb. 7) gehört zu einem unendlichen Zylindermantel.

andere Paar, $P'Q'$ und $P''Q''$, wird von den beiden Rändern des Schnittes PQ gebildet. Die Mantellinien des Zylinders gehen in Geraden über, die zur Rechteckseite $P'Q'$ parallel verlaufen. Die Punkte A und B gehen in die im Rechteck gelegenen Punkte A' und B' über. Die Verbindungslinien der Punkte A und B auf dem Zylindermantel werden zu ebenen Kurven, die die Punkte A' und B' im Rechteck verbinden. Das Kurvenstück $\overset{\frown}{AB}$ – die kürzeste auf dem Zylindermantel gelegene Verbindung – wird zur kürzesten unter den ebenen Kurven, die die Punkte A' und B' verbinden, d. h. zur Strecke $A'B'$. Daher gilt bei der Abwicklung des Zylindermantels zu einem ebenen Rechteck: *Die kürzeste Verbindung $\overset{\frown}{AB}$ auf dem Zylindermantel geht in die Strecke $A'B'$ über.* Die Mantellinien des Zylinders P_1Q_1, P_2Q_2, ... gehen in die Geraden $P_1'Q_1'$, $P_2'Q_2'$, ... über, die zu den Seiten $P'Q'$ und $P''Q''$ des Rechteckes $P'Q'Q''P''$ parallel verlaufen. Die Winkel, die die Verbindungsstrecke $A'B'$ mit diesen Geraden bildet, sind als entsprechende Winkel (Stufenwinkel) an Parallelen gleich. Wir bezeichnen jeden von ihnen mit α.

Nun rollen wir das Rechteck $P'Q'Q''P''$ so auf (wobei die gegenüberliegenden Seiten $P'Q'$ und $P''Q''$ zusammengeheftet werden), daß es wieder die ursprüngliche Zylindergestalt annimmt. Die Punkte A' und B' gehen dann in die Punkte A und B des Zylindermantels über. Die Strecke $A'B'$, die diese Punkte verbindet, wird zur kürzesten Kurve $\overset{\frown}{AB}$ auf dem Zylindermantel. Die Winkel der Strecke $A'B'$ mit den Geraden $P_1'Q_1'$, $P_2'Q_2'$ gehen in ihnen gleiche, zwischen der Kurve $\overset{\frown}{AB}$ und den Mantellinien P_1Q_1, P_2Q_2, ... des Zylinders liegende Winkel über. Da die Gerade $A'B'$ alle zu $P'Q'$ parallelen Geraden unter demselben Winkel α schneidet, *schneidet die kürzeste Kurve* $\overset{\frown}{AB}$, in welche $A'B'$ übergeht, *alle Mantellinien des Zylinders unter dem gleichen Winkel* α (Abb. 7).

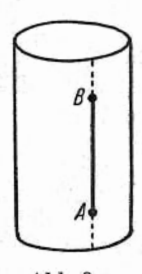


Abb. 9.

Betrachten wir nun den besonderen Fall, daß die Punkte A und B auf einer Mantellinie liegen (Abb. 9). In diesem Fall *ist offenbar die Strecke AB dieser Mantellinie die kürzeste Verbindung der Punkte A und B auf dem Zylindermantel.*

Für den Fall, daß die Punkte A und B auf einem Kreisschnitt des Zylinders liegen (Abb. 10), kommen wir zu folgendem Ergebnis:

Das Kurvenstück $\overset{\frown}{AB}$ dieses Schnittes schneidet alle Mantellinien unter einem rechten Winkel. Es ist die kürzeste Kurve, welche die Punkte A und B verbindet.

Wird der Zylinder längs einer Mantellinie, welche die Kurve $\overset{\frown}{AB}$ nicht schneidet, aufgetrennt und zu einem ebenen Rechteck abgewickelt, so geht die kürzeste Kurve in den beiden besonders betrachteten Fällen in eine Strecke über, die zu den Rechteckseiten parallel verläuft. In allen übrigen Fällen schneidet die kürzeste Linie die Mantellinien unter einem Winkel, der von 90° und 0° verschieden ist.[1])

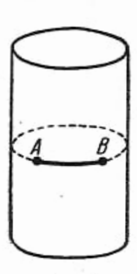


Abb. 10.

2. Schraubenlinien. Unter einer Schraubenlinie versteht man eine auf der Mantelfläche eines Zylinders liegende Kurve, die alle Mantellinien des Zylinders unter gleichem Winkel schneidet (dieser Winkel sei kein rechter).

Wir bezeichnen den Winkel zwischen der Schraubenlinie und den Mantellinien mit α. Die Linie, die die Mantellinien eines Zylinders unter einem rechten Winkel schneidet, ist ein Kreis. Man kann diesen Kreis als Grenzfall von Schraubenlinien für $\alpha = 90°$ ansehen. Ebenso kann man die Mantellinie des Zylinders als den anderen Grenzfall für $\alpha = 0°$ betrachten.

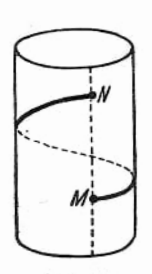


Abb. 11.

Wir betrachten auf dem Zylindermantel zwei Bewegungen mit konstanten Geschwindigkeiten: eine zur Achse parallele Bewegung (entlang einer Mantellinie) und eine Drehbewegung um die Achse (entlang eines Kreisschnittes).

Jede dieser Bewegungen kann in zwei zueinander entgegengesetzten Richtungen erfolgen. Auf einem senkrecht stehenden Zylinder wollen wir eine Bewegung nach oben als positiv, eine Bewegung nach unten als negativ bezeichnen. Eine Drehbewegung von rechts nach links (für einen Betrachter, der sich aufrecht in der Mitte des Zylinders befindet) entgegen dem Uhrzeigersinn wollen wir positive Drehung nennen,

[1]) Es ist interessant, unsere Aufgabe, die kürzeste Linie auf einem Zylindermantel zu finden, mit der auf Seite 12 behandelten Aufgabe, den kürzesten Streckenzug auf dem Mantel eines Prismas zu finden, zu vergleichen (für die unsere Aufgabe ein Grenzfall ist).

eine Drehbewegung von links nach rechts, also im Uhrzeigersinn, dagegen negative Drehung.

Eine Bewegung längs einer Schraubenlinie ergibt sich als Resultierende zweier Bewegungen, einer zur Zylinderachse parallelen Bewegung und einer Drehung um die Achse. Eine Schraubenlinie heißt Rechtsschraube, wenn auf ihr eine Bewegung nach oben mit einer positiven Drehung (von rechts nach links) verbunden ist (Abb. 11); man nennt sie eine Linksschraube, wenn auf ihr eine Bewegung nach oben von einer negativen Drehung (von links nach rechts) begleitet wird.

Die meisten Schlingpflanzen

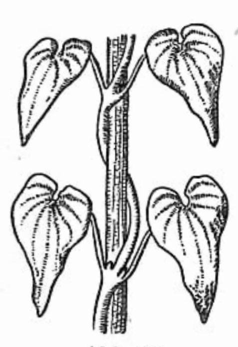


Abb. 12.



Abb. 13.

(Wein, Winde, Bohnen), die sich um eine senkrechte Stütze winden, haben die Form einer Rechtsschraube (Abb. 12). Andere Pflanzen, Hopfen z. B., haben die Gestalt einer Linksschraube (Abb. 13).

Ein Punkt, der sich längs einer Schraubenlinie bewegt, möge eine bestimmte Mantellinie im Punkt M und bei der Fortsetzung der Bewegung erneut im Punkt N schneiden. Beim Durchlaufen des Kurvenstückes MN der Schraubenlinie vollführt der Punkt einen vollständigen Umlauf um die Zylinderachse. In dieser Zeit entfernt er sich um die Strecke MN vom Punkte M nach oben (Abb. 11). Ist die Drehgeschwindigkeit gleich Null, bewegt sich der Punkt daher nur parallel zur Zylinderachse entlang einer

Mantellinie, so tritt der erste Grenzfall ein. Der andere Grenzfall tritt ein, wenn die Geschwindigkeit der zur Zylinderachse parallelen Bewegung gleich Null wird und sich der Punkt nur um die Achse kreisförmig bewegt.

Aus dem oben Gesagten folgt der Satz: *Die kürzeste Linie $\overset{\frown}{AB}$ auf einem Zylindermantel, die zwei gegebene Punkte A und B verbindet, ist ein Stück einer Schraubenlinie.*

3. Schraubenlinien, die zwei gegebene Punkte verbinden. Zwei auf einem Zylindermantel liegende Punkte können durch verschiedene Schraubenlinien miteinander verbunden werden. Die beiden Punkte mögen auf dem Zylindermantel durch die kürzeste Kurve $\overset{\frown}{AB}$ miteinander verbunden sein. Diese Kurve ist ein Teil einer Schraubenlinie. Bei der Abwicklung des Zylindermantels (der längs einer Mantellinie, die $\overset{\frown}{AB}$ nicht schneidet, aufgetrennt ist) zu einem ebenen Rechteck geht sie in eine Gerade über (Abb. 7 und 8, S. 14).

Schneiden wir jetzt den Zylindermantel längs einer Mantellinie P_1Q_1 auf, die die kürzeste Kurve $\overset{\frown}{AB}$ im Punkte C schneidet (Abb. 7), so wird $\overset{\frown}{AB}$ in die beiden Teile $\overset{\frown}{AC}$ und $\overset{\frown}{CB}$ zerlegt. Wenn wir nun den Zylindermantel zu einem ebenen Rechteck abwickeln, so gehen die Punkte A und B in die Punkte A'' und B'' des Rechteckes über (Abb. 14) und die Teile $\overset{\frown}{AC}$ und $\overset{\frown}{CB}$ der Kurve $\overset{\frown}{AB}$ in die Strecken $A''C''$ bzw. $B''C'$. Man kann nun die Punkte A'' und B'' durch die Gerade $A''B''$, die im Rechteck $P_1'Q_1'Q_1''P_1''$ liegt, miteinander verbinden. $A''B''$ ist offenbar die kürzeste aller in diesem Rechteck gelegenen Verbindungslinien der Punkte A'' und B''.

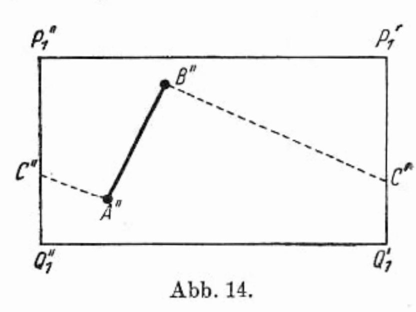


Abb. 14.

Nun rollen wir unser Rechteck wieder zu einem Zylinder auf und heften die Seiten P_1', Q_1' und P_1'', Q_1'' so zusammen, daß die Punkte C' und C'' zusammenfallen und die Lage des Punktes C einnehmen. Dann gehen die Punkte A'' und B'' wieder in die Punkte A und B auf dem Zylindermantel über, und die Strecken

$A''C''$ und $B''C'$ werden zur Kurve $\overset{\smile}{AB}$, der kürzesten aller Verbindungslinien der Punkte A und B auf dem Zylindermantel. Die Strecke $A''B''$ geht offenbar in das Stück $\overset{\frown}{AB}$ einer Schraubenlinie über, das die Punkte A und B ebenfalls verbindet. In Abb. 15 ist $\overset{\smile}{AB}$ Teil einer Rechts- und $\overset{\frown}{AB}$ Teil einer Linksschraube. Beide gehen durch A und B.

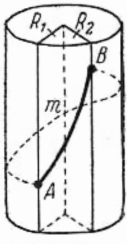


Abb. 15.

Kurven, die die Rechteckseiten nicht schneiden, gehen, wenn das Rechteck zu einem Zylindermantel zusammengerollt wird, in Kurven über, die die Mantellinie P_1Q_1 nicht schneiden (weil die Seiten $P_1'Q_1'$ und $P_2''Q_2''$ unseres Rechteckes längs dieser Geraden zusammengeheftet werden). Unter diesen Kurven wird die Kurve $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AmB}$ zur kürzesten (Abb. 15). Sie kann aber nicht die kürzeste aller Verbindungskurven der Punkte A und B auf dem Zylindermantel sein; denn $\overset{\smile}{AB}$ ist kürzer als $\overset{\frown}{AB}$. Deshalb kann $\overset{\frown}{AB}$ nie die kürzeste der Kurven sein, die auf dem Zylindermantel die Punkte A und B verbinden.

Nun legen wir durch den Punkt A und die Zylinderachse die Halbebene R_1 und durch den Punkt B und die Zylinderachse die Halbebene R_2 (Abb. 15).

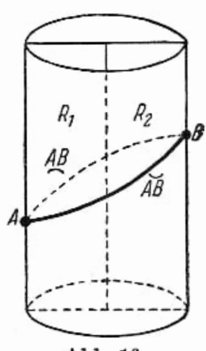


Abb. 16.

Die Halbebenen bilden zusammen zwei Kantenwinkel. Innerhalb des einen befindet sich das Kurvenstück $\overset{\smile}{AB}$, innerhalb des anderen das Kurvenstück $\overset{\frown}{AB}$. Von diesen Kurvenstücken ist dasjenige das kürzere, das innerhalb des kleineren Winkels liegt.

Liegen jedoch die Halbebenen R_1 und R_2 in einer Ebene (d. h., ist der Winkel zwischen ihnen ein gestreckter), so sind die beiden Kurvenstücke $\overset{\smile}{AB}$ und $\overset{\frown}{AB}$ gleich lang. In diesem Falle gibt es auf dem Zylindermantel zwei kürzeste Linien (derselben Länge), welche die Punkte A und B verbinden (Abb. 16).

Beide von uns betrachteten Schraubenlinien $\overset{\smile}{AB}$ und $\overset{\frown}{AB}$, welche die Punkte A und B verbinden, haben eine gemeinsame Eigenschaft: Wenn wir uns auf einer von ihnen vom Punkte A

zum Punkte B hinbewegen, vollführen wir keinen vollen Umlauf um die Zylinderachse.

Der Zylinder werde nun mehrfach mit einem rechteckigen längeren Blatt Papier umwickelt. Die Breite dieses Blattes stimme mit der Höhe des Zylinders überein (Abb. 17). Durchstechen wir dieses Blatt in zwei Punkten A und B mit einer Nadel und wickeln es danach zu einem ebenen Rechteck ab, so werden sich an bestimmten Stellen des Blattes Spuren des Stiches durch den Punkt A befinden. In Abb. 18 sind diese mit den Buchstaben A_1', A_2', A_3' bezeichnet. Sie liegen auf einer horizontalen Geraden, die zu den horizontalen Seiten unseres Rechteckes parallel verläuft. Wenn wir durch die Punkte A_1', A_2', A_3', ... die Geraden $P_1'Q_1'$, $P_2'Q_2'$, $P_3'Q_3'$, ..., die zum anderen Rechteckseitenpaar parallel verlaufen, einzeichnen, so wird das Rechteck $P_1'Q_1'Q_2'P_2'$, das eine einfache Umwicklung des Blattes um den Zylindermantel darstellt, abgetrennt. Bei einer Aufwicklung des Blattes auf den Zylinder fallen

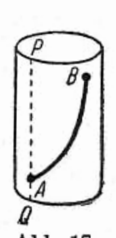


Abb. 17.

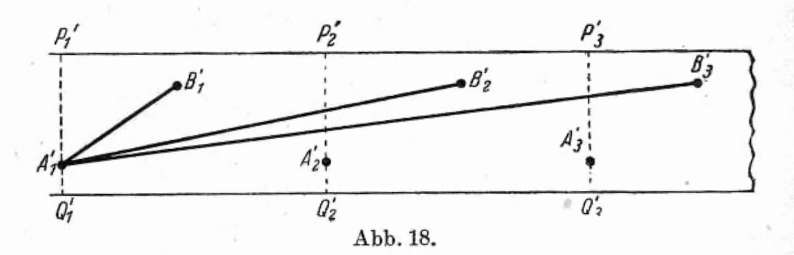


Abb. 18.

die Strecken $P_1'Q_1'$ und $P_2'Q_2'$ mit der Mantellinie PQ des Zylinders zusammen und gehen durch den Punkt A des Zylinders, auf den dabei die zusammenfallenden Punkte A_1' und A_2' zu liegen kommen.

Die Punkte B_1', B_2', B_3', ... seien die Spuren des Stiches durch den Punkt B. Ihre Lage entspricht vollkommen der der Punkte A_1', A_2', A_3', ...

Nun verbinden wir den Punkt A_1' durch Geraden mit den Punkten B_1', B_2', B_3', ... Wird unser Blatt sodann in der Weise auf den Zylinder aufgewickelt, daß die Punkte A_1', A_2', A_3', ... auf den Punkt A, die Punkte B_1', B_2', B_3', ... auf den Punkt B des Zylinders zu liegen kommen, so geht die Gerade $A_1'B_1'$ in den

bereits oben betrachteten Bogen $\overset{\smile}{AB}$ einer Schraubenlinie über (Abb. 17).

Wir werden im folgenden der Kürze halber sagen, eine Kurve $\overset{\smile}{AB}$ realisiere n ganze positive (negative) Windungen um die Zylinderachse, wenn bei einer Bewegung vom Punkt A zum Punkte B längs dieser Kurve auf dem Zylindermantel mehr als n und weniger als $(n + 1)$ oder genau n ganze positive (negative) Umläufe um die Zylinderachse ausgeführt werden.

Beim Aufrollen der Ebene auf den Zylinder geht die Strecke $A_1'B_2'$ in ein Stück $(\overset{\smile}{AB})_1$ einer Schraubenlinie über, das die Punkte A und B miteinander verbindet (Abb. 19). Ebenso gehen die Strecken $A_1'B_3'$, $A_1'B_4'$, ... in Bögen $(\overset{\smile}{AB})_2$ (Abb. 20), $(\overset{\smile}{AB})_3$, ...

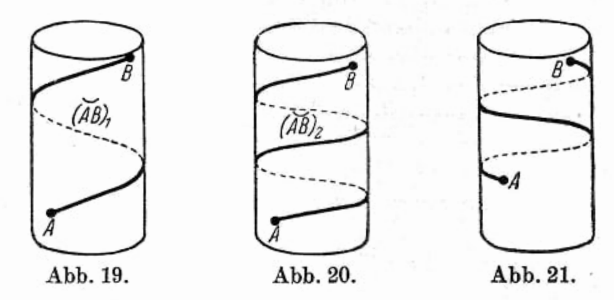


Abb. 19. Abb. 20. Abb. 21.

von Schraubenlinien über, die diese Punkte miteinander verbinden. Der Kurvenbogen $(\overset{\smile}{AB})_1$ realisiert einen ganzen positiven Umlauf um die Zylinderachse, die Bögen $(\overset{\smile}{AB})_2$, $(\overset{\smile}{AB})_3$, ... entsprechend zwei, drei, ... solcher ganzen Umläufe.

Der Bogen $(\overset{\smile}{AB})_1$ ist die kürzeste aller Kurven, die die Punkte A und B verbinden und einen ganzen positiven Umlauf um die Achse realisieren. Analog sind $(AB)_2$, $(AB)_3$ usw. die kürzesten Kurven, die entsprechend zwei, drei usw. ganze Umläufe realisieren.

Die betrachteten Bögen gehörten zu Rechtsschrauben. Ebenso kann man auch Bögen von Linksschrauben erhalten, die die Punkte A und B verbinden und einen, zwei, drei, ... ganze negative Umläufe um die Zylinderachse realisieren (Abb. 21). Jeder dieser Kurvenbögen ist die kürzeste Verbindungslinie der Punkte A und B, die die entsprechende Anzahl ganzer negativer Umläufe

um die Zylinderachse realisiert. Wir wollen nun klären, wie ein straff gespannter Gummifaden, der in den Punkten A und B befestigt ist, auf dem Zylindermantel liegt. Dieser Faden liegt, wenn er genügend gespannt ist, auf einer kürzesten Linie, d. h. auf einer der Schraubenlinien, die die Punkte A und B miteinander verbinden. Wenn der Faden den Zylinder z. B. so umwindet, daß er bei einer Bewegung auf der Schraubenlinie eine positive Drehung um die Achse (von rechts nach links) ausführt, so hat er die Lage einer der Schraubenlinien $\overset{\frown}{AB}$, $(\overset{\frown}{AB})_1$, $(\overset{\frown}{AB})_2$ usw., und zwar nimmt der Faden die Lage $\overset{\frown}{AB}$ ein, wenn er keine volle Windung um die Zylinderachse beschreibt, die Lage $(\overset{\frown}{AB})_1$, wenn er eine, die Lage $(AB)_2$, wenn er zwei ganze Windungen beschreibt, usw.

In der Tat liegt ein im ebenen Rechteck zwischen dem Punkte A_1' und einem der Punkte B_1', B_2', B_3', ... gespannter Faden auf einer der Strecken $A_1'B_1'$, $A_1'B_2'$, $A_1'B_3'$, ... Wird dieses Rechteck derart auf die Mantelfläche des Zylinders aufgewickelt, daß A_1' mit dem Punkt A und die Punkte B_1', B_2', B_3', ... mit dem Punkt B zusammenfallen, so nimmt also der gespannte Faden entsprechend die Form einer der Schraubenlinien $\overset{\frown}{AB}$, $(\overset{\frown}{AB})_1$, $(\overset{\frown}{AB})_2$, ... an.

§ 3. Kürzeste Linien auf einer Kegelfläche

1. Die kürzeste Linie auf einem Kegelmantel. Von einem Punkte O mögen zwei Strahlen OA und ON ausgehen. Wir lassen den Strahl OA um den Strahl ON rotieren. Die dabei vom Strahl OA beschriebene Fläche nennt man *Mantelfläche eines Kegels* oder einfach *Kegelfläche* (Abb. 22), die Gerade ON heißt *Kegelachse*. Die vom Punkte O ausgehenden Strahlen, die auf dem Kegelmantel liegen, nennt man *Erzeugende des Kegels.*[1])

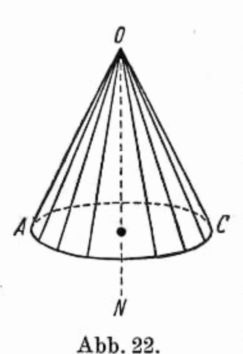


Abb. 22.

Liegen zwei Erzeugende OA und OC so, daß eine durch sie hindurchgelegte Ebene auch die Kegelachse enthält, so spricht man von *gegenüberliegenden* Erzeugenden. Zwei gegenüberliegende Erzeugende teilen die Kegelfläche in zwei *gleiche* (*kongruente*) Teile.

---

[1]) In Abb. 22 ist nur ein endlicher Teil des unendlichen Kegelmantels dargestellt.

Wir schneiden nun eine gegebene Kegelfläche längs einer Erzeugenden OA auf. Danach kann sie in eine Ebene abgewickelt werden. Geht die Kegelspitze O hierbei in den Punkt O' der Ebene über, so werden die Erzeugenden des Kegels in der Ebene zu Strahlen, die vom Punkte O' ausgehen. Die Kegelfläche selbst geht in einen Kreissektor $A_1'O'A_2'$ der Ebene über (Abb. 23). Den Öffnungswinkel dieses Kreissektors nennen wir den *Abwicklungswinkel des Kegels*. Er ist stets kleiner als 360°. Seine Schenkel $O'A_1'$ und $O'A_2'$ entsprechen der Erzeugenden OA, längs der die Kegelfläche aufgeschnitten wurde. Die Erzeugende OC, die der Erzeugenden OA gegenüberliegt, wird zur Halbierenden $O'C'$ des Winkels $A_1'O'A_2'$. Denn die beiden Erzeugenden OA und OC teilen den längs OA aufgeschnittenen Kegelmantel in zwei gleiche Teile S und T. Bei der Abwicklung des Kegelmantels zu dem ebenen Kreissektor $A_1'O'A_2'$ gehen die Teile S und T des Kegelmantels in die Hälften S' und T' dieses Kreissektors über, und die Erzeugende OC wird zur Halbierenden $O'C'$ dieses Sektors.

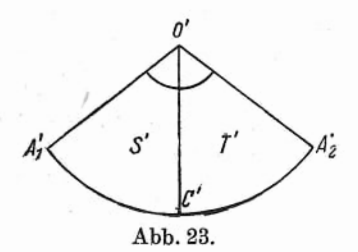


Abb. 23.

Wir haben den aufgeschnittenen Kegelmantel auf eine Ebene abgewickelt. Wir gehen jetzt umgekehrt vor, d. h., wir rollen den Kreissektor $A_1'O'A_2'$ zu einem Kegelmantel auf. Dabei gehe der Punkt O' in die Kegelspitze O über, während die Schenkel $O'A_1'$ und $O'A_2'$ des Abwicklungswinkels zu ein und derselben Erzeugenden werden sollen.

Wir schneiden nun die Ebene längs des Schenkels $O'A_1'$ unseres Abwicklungswinkels auf und wickeln sie auf den Kegel. Im allgemeinen wird die Ebene den Kegelmantel mehrere Male bedecken. Ist der Abwicklungswinkel etwa gleich 90°, so bedeckt die Ebene den Kegelmantel insgesamt viermal. Ziehen wir nämlich vom Punkte O' die Strahlen $O'A_2'$, $O'A_3'$ und $O'A_4'$ unter Winkeln von 90°, 180° und 270° in bezug auf $O'A_1'$, so bedeckt beim Aufwickeln der aufgeschnittenen Ebene auf den Kegel jeder der Kreissektoren $A_1'O'A_2'$, $A_2'O'A_3'$, $A_3'O'A_4'$, $A_4'O'A_1'$ vollständig den Kegelmantel. Insgesamt erhalten wir eine vierfache Überdeckung des Kegels. Die Strahlen $O'A_1'$, $O'A_2'$, $O'A_3'$, $O'A_4'$ der Ebene gehen in ein und dieselbe Erzeugende des Kegels über.

Ist jedoch der Abwicklungswinkel etwa gleich 100°, so bedeckt die aufgeschnittene Ebene den Kegelmantel dreimal vollständig und einmal teilweise (die Ebene besteht aus drei aneinanderliegenden Kreissektoren mit Zentriwinkeln von 100° und dem Scheitelpunkt O', von denen jeder den Kegelmantel einmal ganz bedeckt, und außerdem aus einem Kreissektor mit einem Zentriwinkel von 60°, der einen Teil der Mantelfläche zusätzlich bedeckt).

2. Geodätische Linien auf einem Kegelmantel. Betrachten wir nun in der Ebene eine beliebige Gerade l', die durch den Punkt O' verlaufe. Sie besteht somit aus zwei Strahlen $O'D'$ und $O'E'$ (Abb. 24). Wird die Ebene auf einen Kegel gewickelt (der Punkt O' gehe hierbei in die Kegelspitze O über), so werden die Strahlen $O'D'$ und $O'E'$

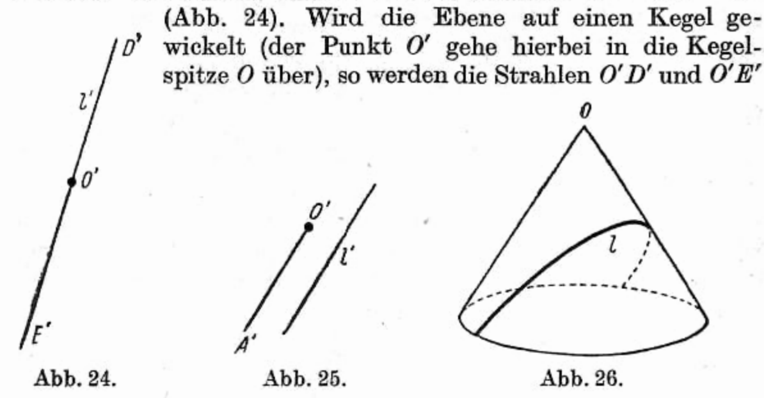


Abb. 24. Abb. 25. Abb. 26.

zu Erzeugenden des Kegels, so daß unserer Geraden zwei Erzeugende entsprechen.[1])

Die Gerade l' verlaufe jetzt nicht durch den Punkt O' (Abb. 25). Wir schneiden die Ebene längs des Strahls $O'A'$, der zu l' parallel verläuft, auf und wickeln sie auf den Kegelmantel. Die Gerade l' geht dabei in eine bestimmte Kurve l auf dem Kegelmantel über (Abb. 26). Diese Kurve l heiße *geodätische Linie* auf dem Kegelmantel. Jede Strecke der Geraden l' wird zu einem Stück der Kurve l. Umgekehrt geht jedes Stück der Kurve l bei einer Abwicklung des Kegelmantels in die Ebene in eine Strecke der Geraden l' über.

---

[1]) Die zwei Erzeugenden können zu einer zusammenfallen. Dies tritt dann ein, wenn der Betrag des Abwicklungswinkels des Kegels, in Grad angegeben, ein Teiler der Zahl 180 ist, d. h., wenn dieser Winkel gleich 180°, 90°, 60°, ..., allgemein gleich $\frac{180°}{k}$ ist, wobei k eine ganze Zahl ist.

Die so entstehenden Kurven spielen auf dem Kegelmantel die gleiche Rolle wie die Schraubenlinien auf einem Zylindermantel.

Wir verbinden zwei Punkte A und B des Kegelmantels durch verschiedene, auf dem Mantel gelegene Kurven. Eine von ihnen, die Kurve $\overset{\smile}{AB}$, möge die geringste Länge haben. Bei der Abwicklung des Kegelmantels in die Ebene geht die Kurve $\overset{\smile}{AB}$ in eine ebene Kurve $A'B'$ über. So wie die Kurve $\overset{\smile}{AB}$ die kürzeste aller auf dem Kegelmantel gelegenen Verbindungskurven der Punkte A und B ist, so ist $A'B'$ die kürzeste aller Verbindungskurven der Punkte A' und B' in der Ebene, d. h., $A'B'$ ist geradlinig. Die Kurve $\overset{\smile}{AB}$, die bei der Abwicklung des Kegelmantels in die Ebene somit in ein Geradenstück übergeht, gehört zu einer Geodätischen.

Die Form der Geodätischen hängt offenbar wesentlich vom Abwicklungswinkel des Kegels ab.

3. Doppelpunkte geodätischer Linien. Wir sprechen zunächst folgende Definition aus: Wird bei der Bewegung längs einer bestimmten Kurve q ein und derselbe Punkt A zweimal durchlaufen, so nennt man den Punkt A *Doppelpunkt* der Kurve q. In Abb. 27 ist der Punkt B Doppelpunkt der Kurve l; bewegt man sich nämlich auf der Kurve l in der durch die Pfeile angegebenen Richtung, so passiert man den Punkt B zweimal.

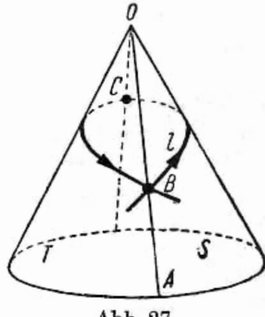


Abb. 27.

Satz 1: *Ist der Abwicklungswinkel eines Kegels größer oder gleich* 180°, *so haben die Geodätischen des Kegels keine Doppelpunkte. Ist der Abwicklungswinkel des Kegels jedoch kleiner als* 180°, *so besitzt jede Geodätische mindestens einen Doppelpunkt.*

Betrachten wir nun in der Ebene einen Punkt O' und eine Gerade l', die nicht durch den Punkt O' verläuft (Abb. 28). Rollen wir die Ebene derart auf den Kegel auf, daß O' in die Kegelspitze O fällt, so geht die Gerade l' in eine Geodätische l über.

Es sei C' der Fußpunkt der von O' auf l' gefällten Senkrechten. Wird die Ebene auf den Kegel aufgerollt, so wird der Strahl $O'C'$ zur Erzeugenden OC des Kegels. Der Punkt C heißt auch *Gipfel*

der Geodätischen auf dem Kegelmantel. Die gegenüberliegende Erzeugende des Kegels bezeichnen wir mit OA. OA und OC teilen den Kegelmantel in zwei gleiche Teile S und T. Wir schneiden nun den Kegelmantel längs der Erzeugenden OA auf und wickeln ihn so in die Ebene ab, daß die Kegelspitze O in den Punkt O' und die Erzeugende OC in den Strahl $O'C'$ übergeht. Dabei wird die Geodätische l wieder zur Geraden l', während der gesamte Kegelmantel zum Kreissektor $A'O'A''$ wird. Seine beiden Hälften S und T entsprechen den Hälften S' und T' dieses Kreissektors. Die Gerade $O'C'$ ist die Halbierende des Kreissektors.

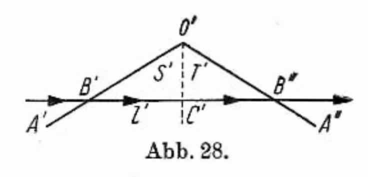


Abb. 28.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Winkel $A'O'A''$ (der Abwicklungswinkel des Kegels) ist größer oder gleich 180° (Abb. 29). Die Gerade l' liegt dann ganz im Innern dieses Winkels. Wird der Kreissektor wieder so zu einem Kegelmantel aufgerollt, daß die beiden Schenkel $O'A'$ und $O'A''$ des Winkels zur Erzeugenden OA zusammenfallen, so geht die Gerade l' wieder in die Geodätische l auf dem Kegelmantel über. Verschiedene Punkte der Geraden l' werden zu verschiedenen Punkten des Kegelmantels. Folglich besitzt l in diesem Falle keine Doppelpunkte.

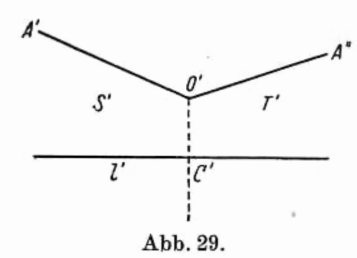


Abb. 29.

2. Der Winkel $A'O'A''$ ist kleiner als 180°. Dann schneidet die Gerade l' (als Senkrechte zur Halbierenden $O'C'$) die Schenkel des Winkels in zwei Punkten, die wir mit B' und B'' bezeichnen (Abb. 28).

Das Dreieck $B'O'B''$ ist gleichschenklig, weil seine Höhe $O'C$ gleichzeitig Winkelhalbierende ist. Rollen wir den Kreissektor $A'O'A''$ derart auf den Kegel auf, daß O' zur Kegelspitze wird und die beiden Schenkel $O'A'$ und $O'A''$ des Winkels in die Erzeugende OA übergehen, so fallen die Punkte B' und B'' infolge der Gleichheit der Strecken $O'B'$ und $O'B''$ in einem Punkt B dieser Erzeugenden zusammen (Abb. 27). Die Gerade l' wird zur Geodätischen l. Die in der Hälfte S' des Kreissektors $B'O'B''$

liegende Strecke $B'C'$ der Geraden l' wird zu dem Bogen $\overset{\frown}{BC}$ der Kurve l, der, in der Hälfte S des Kegelmantels liegend, die Punkte B und C verbindet. Die in der Hälfte T' des Kreissektors $B'O'B''$ liegende Strecke $B''C'$ geht entsprechend in den Bogen $\underset{\frown}{BC}$ der Kurve l über, der, auf der Hälfte T des Kegelmantels liegend, die Punkte B und C verbindet. Der Punkt B ist ein Doppelpunkt der Kurve l. Die Strecke $B'B''$ der Geraden l' geht in das Kurvenstück BCB über, das die Form einer Schleifenkurve mit zusammenfallenden Endpunkten hat.

Untersuchen wir nun, wieviel Doppelpunkte eine Geodätische besitzt. Diese Frage wird durch den folgenden Satz beantwortet.

Satz 2: *Es sei α der Abwicklungswinkel eines Kegels* (angegeben in Grad). *Geht α nicht in 180° auf, so ist die Anzahl der Doppelpunkte einer Geodätischen gleich dem ganzzahligen Teil des Bruches $\frac{180}{\alpha}$. Geht α in 180° auf, so ist die Anzahl der Doppelpunkte gleich $\frac{180}{\alpha} - 1$.*

Ist $\alpha > 180°$, so ist der ganzzahlige Teil des Bruches $\frac{180}{\alpha}$ gleich Null. Ist $\alpha = 180°$, so ist $\frac{180}{\alpha} - 1 = 0$. Auf Grund des eben formulierten Satzes ist die Anzahl der Doppelpunkte in diesen Fällen also gleich Null. Das ist lediglich eine andere Formulierung des Satzes 1, der durch den Satz 2 verschärft wird.

Es bleibt also der Fall $\alpha < 180°$ zu betrachten. Der Winkel $A'O'A''$ (Abb. 30) sei der Abwicklungswinkel des Kegels. Wir zeichnen zu l' durch den Punkt O' die Senkrechte $O'C'$ und die Parallele KL. Die Gerade KL teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Uns interessiert nur die Halbebene, in der die Gerade l' liegt. In dieser Halbebene ziehen wir vom Punkte O' aus Strahlen, die mit dem Strahl $O'C'$ Winkel bilden, die

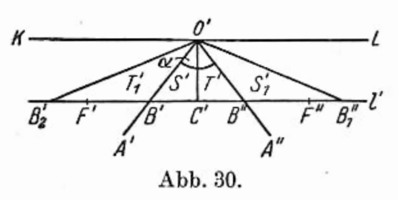


Abb. 30.

ganze Vielfache von $\frac{\alpha}{2}$ darstellen. Es seien dies die Strahlen $O'B'$, $O'B''$, $O'B_1'$, $O'B_1''$, ..., wobei B', B'', B_1', B_1'', ... die Schnittpunkte mit der Geraden l' bezeichnen. Wir sehen, daß $O'B' = O'B''$, $O'B_1' = O'B_1''$, ... ist. Nun wickeln wir unsere Halbebene so auf

den Kegel, daß der Punkt O' in die Kegelspitze O fällt und der Strahl $O'C'$ zur Erzeugenden OC wird (Abb. 31). Die von den benachbarten Strahlen $O'B_1'$, $O'B'$, $O'C'$, $O'B''$, $O'B_1''$, ... gebildeten Sektoren unserer Halbebene mit Zentriwinkeln von $\frac{\alpha}{2}$ bedecken dabei die beiden Hälften S und T des Kegelmantels mehrmals. Der Sektor S' fällt nämlich auf die Hälfte S des Kegelmantels; die ihm anliegenden Sektoren T_1' und T'' fallen auf die andere Mantelhälfte T usw. Während der Strahl $O'C'$ in die Erzeugende OC übergeht, gehen die Strahlen $O'B'$ und $O'B''$ in die gegenüberliegende Erzeugende OA über, und die Strahlen $O'B_1'$, $O'B_1''$ werden wieder zu OC usw.

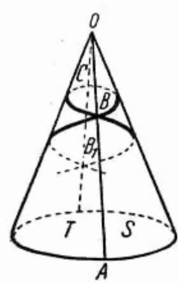


Abb. 31.

Da $O'B' = O'B''$ und $O'B_1' = O'B_1''$ ist, fallen die Punktpaare B' und B'', B_1' und B_1'', ..., die nach der Aufwicklung jeweils auf einer Erzeugenden liegen, paarweise zusammen, genauer, B' und B'' fallen zusammen und werden zum Punkte B der Erzeugenden OA, B_1' und B_1'' werden zum Punkte B_1 der Erzeugenden OC usw. Die Punkte B, B_1, ... sind folglich Doppelpunkte der Kurve l, in welche die Gerade l' bei der Aufwicklung der Halbebene auf den Kegel übergeht. Die Anzahl dieser Punkte ist gleich der Zahl der Strahlen $O'B'$, $O'B_1'$, ... innerhalb des rechten Winkels $KO'C'$. Da zwei benachbarte Strahlen miteinander einen Winkel von $\frac{\alpha}{2} < 90°$ bilden, ist die Anzahl der durch die Strahlen im rechten Winkel $KO'C'$ gebildeten Sektoren gleich der größten ganzen Zahl, deren Produkt mit $\frac{\alpha}{2}$ kleiner als 90 ist. Mit anderen Worten, geht α nicht in 180° auf, so ist die Anzahl der Strahlen gleich dem ganzzahligen Teil des Bruches $\frac{180}{\alpha}$, und geht α in 180 auf, so ist ihre Anzahl gleich $\frac{180}{\alpha} - 1$.

Zum vollständigen Beweis des Satzes bleibt jetzt noch zu zeigen, daß außer den Doppelpunkten der Geodätischen, die durch Zusammenfallen von solchen Punkten der Geraden l' wie B_1' und B_2' gebildet werden, keine weiteren existieren. Dies soll jetzt geschehen.

Ein Doppelpunkt der Geodätischen l entsteht offenbar nur dann, wenn zwei Punkte unserer Geraden l' bei der Aufwicklung

der Halbebene auf den Kegel in ein und denselben Punkt des Kegelmantels übergehen. Dazu ist erforderlich, daß die beiden Punkte auf l' von O' gleich weit entfernt sind. Dies bedeutet, die beiden Punkte müssen auf l' zu C' symmetrisch liegen. Einer von ihnen, wir nennen ihn F', möge links, der andere, F'', rechts von C' liegen (s. Abb. 30). Fällt der Punkt F' nicht mit einem der Punkte B', B'', B_1', B_1'', ... zusammen, so muß er in einem der Sektoren $C'O'B'$, $C'O'B''$, $B'O'B_1'$, $B''OB_1''$, ... liegen, die in Abb. 30 entsprechend mit S', T', T_1', S_1', ... bezeichnet sind. Liegt der Punkt F' im Sektor S_i', so liegt der zu ihm symmetrische Punkt F'' in T_i'. D. h., bei der Aufwicklung der Halbebene auf den Kegel wird F' zu einem auf der Hälfte S des Kegelmantels gelegenen Punkt und F'' zu einem auf der Hälfte T gelegenen. Wird umgekehrt der Punkt F' zu einem Punkt der Hälfte T des Kegelmantels, so wird F'' zu einem Punkte der Hälfte S. In beiden Fällen gehen F' und F'' also in verschiedene Punkte des Kegelmantels über. Daraus folgt, daß es auf der Geodätischen l außer den durch Zusammenfallen der Punktpaare B' und B'', B_1' und B_1'', ... gebildeten Doppelpunkten keine weiteren gibt, was zu beweisen war. Wir empfehlen dem Leser, zu untersuchen, wie der zwischen den Parallelen KL und l' liegende Streifen bei verschiedenen Werten des Abwicklungswinkels α des Kegels auf dem Kegelmantel zu liegen kommt (für $\alpha > 180°$; $\alpha = 180°$, $180° > \alpha > 90°$; $\alpha = 90°$; $90° > \alpha > 60°$; usw.).

Wiederholt man die Überlegung vom Schluß des vorigen Paragraphen, so kommt man zu dem Ergebnis, daß ein auf einen Kegelmantel gespannter elastischer Faden entlang einer geodätischen Linie verläuft.

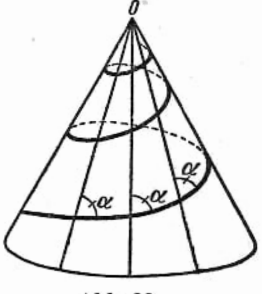


Abb. 32.

A n m e r k u n g: Man kann auf einem Kegelmantel auch Schraubenlinien, d. h. Linien, die alle Erzeugenden des Kegels unter gleichen Winkeln α schneiden, betrachten (Abb. 32). Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90°$ entarten die auf dem Kegel liegenden Schraubenlinien entsprechend zu Erzeugenden und Kreisen. Für $\alpha \neq 0$ stellen die Schraubenlinien auf dem Kegelmantel keine Geodätischen dar. Darin unterscheiden sie sich von den auf einem Zylindermantel liegenden Schraubenlinien.

4. Der Satz von CLAIRAUT *über Geodätische auf einem Kegelmantel.* Der Punkt C sei der Gipfel einer Geodätischen s auf einem Kegelmantel. Dieser Punkt habe von der Kegelspitze die Entfernung $OC = c$ und von der Kegelachse die Entfernung r_0 (Abb. 33). Die Geodätische verläuft dann im Punkte C senkrecht zur Erzeugenden OC. Ferner sei A ein *beliebiger* Punkt der Geodätischen, r sein Abstand zur Achse, α der Winkel zwischen der Geodätischen s und der Erzeugenden OA und l die Länge der Strecke OA. Dann besteht die Beziehung

$$l \cdot \sin \alpha = c. \tag{1}$$

Um diese Beziehung zu beweisen, wickeln wir den Kegelmantel in eine Ebene ab (Abb. 34). Dabei werden OC und OA

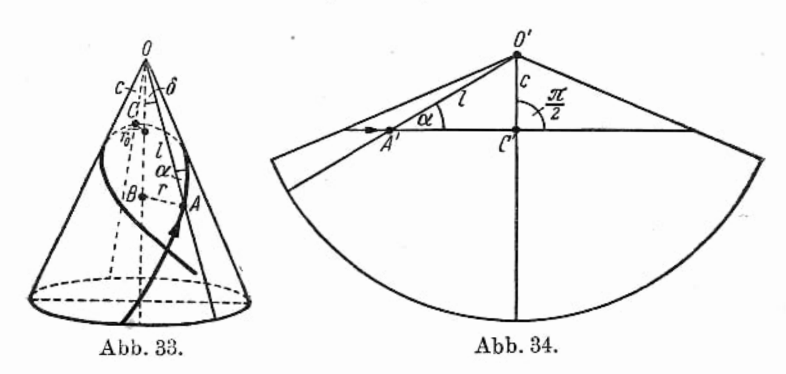


Abb. 33. Abb. 34.

zu $O'C'$ und $O'A'$ (die Längen c und l bleiben hierbei unverändert). Das Stück AC der Geodätischen s geht in die Strecke $A'C'$ über, wobei $O'C'$ auf der Geraden $A'C'$ senkrecht steht. Der Winkel bei A' im Dreieck $A'O'C'$ ist gleich α. Aus diesem Dreieck ergibt sich

$$l \cdot \sin \alpha = c,$$

was zu beweisen war.

Ist δ der Winkel zwischen einer Erzeugenden des Kegels und der Kegelachse (Abb. 33), so gilt $r = l \cdot \sin \delta$. Nach Multiplikation beider Seiten von (1) mit $\sin \delta$ erhalten wir

$$l \cdot \sin \delta \cdot \sin \alpha = c \cdot \sin \delta$$

oder

$$r \cdot \sin \alpha = c_1, \tag{2}$$

wobei $c_1 = c \cdot \sin \delta$ für eine Geodätische konstant ist.

Wir formulieren die in dieser Gleichung enthaltene Aussage als

Satz 3: *Für alle Punkte A einer Geodätischen s auf einem Kegelmantel ist der Ausdruck* $r \cdot \sin \alpha$ *eine konstante Größe, wobei r der Abstand des Punktes A von der Kegelachse und* α *der Winkel zwischen der Erzeugenden OA und der Geodätischen s ist,*

$$r \cdot \sin \alpha = \text{const}. \tag{3}$$

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes von CLAIRAUT (s. § 10).

Ein Zylinder kann als Grenzfall eines Kegels aufgefaßt werden, wenn man sich die Kegelspitze im Unendlichen gelegen denkt. Einer Geodätischen auf dem Kegel entspricht dann eine bestimmte Schraubenlinie auf dem Zylinder. Die Formel (3) bleibt daher offenbar auch für Zylinder gültig, d. h., die Entfernung r von der Zylinderachse ist für alle Punkte der Mantelfläche dieselbe, und der Winkel α zwischen einer Schraubenlinie und den Erzeugenden des Zylinders ist für alle Punkte der Schraubenlinie derselbe.

§ 4. Kürzeste Linien auf der Oberfläche einer Kugel

1. Die Länge einer Kurve. Bei der Untersuchung kürzester Kurven auf dem Mantel eines Zylinders oder eines Kegels wurde die Tatsache benutzt, daß sich Zylinder- und Kegelmantel in eine Ebene abwickeln lassen. Diese Methode läßt sich hier jedoch nicht anwenden, weil die Oberfläche einer Kugel nicht in eine Ebene abwickelbar ist.

Wir erinnern uns zunächst daran, daß eine Gerade, wie in der Elementargeometrie gezeigt wird, die Eigenschaft hat, die kürzeste aller Kurven mit denselben Endpunkten zu sein. Bekanntlich ist in einem Dreieck die Länge einer Seite stets kleiner als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten. Dann muß aber die Länge einer Strecke AB kleiner sein als die Länge eines Streckenzuges $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$, der dieselben Endpunkte $A_0 = A$ und $A_n = B$ hat (Abb. 35). Um dies einzusehen, ersetzen wir zuerst die zwei benachbarten Strecken A_0A_1 und A_1A_2

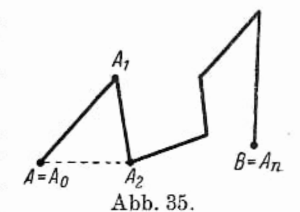


Abb. 35.

des Streckenzuges durch die Strecke A_0A_2. Hierbei wird die Länge des Streckenzuges nicht größer (da die Seite A_0A_2 des Dreiecks $A_0A_1A_2$ kürzer ist als die Summe der Seiten A_0A_1 und A_1A_2; liegen die Punkte A_0, A_1, A_2 auf einer Geraden, so ist die Summe der Längen

der Strecken A_0A_1 und A_1A_2 gleich der Länge der Strecke A_0A_2. Ersetzen wir nun die beiden Strecken A_0A_1 und A_1A_2 durch die Strecke A_0A_2, so bleibt die Länge des Streckenzuges unverändert. Dies gilt entsprechend auch für das Weitere). Der Streckenzug $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ geht dabei in den Streckenzug $A_0A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ über, der eine Strecke weniger besitzt. Ganz entsprechend können in diesem Streckenzug die zwei benachbarten Strecken A_0A_2 und A_2A_3 durch eine Strecke ersetzt werden, wodurch sich die Länge des Streckenzuges ebenfalls verringert bzw. nicht vergrößert. Dies ergibt den Streckenzug $A_0A_3 \ldots A_{n-1}A_n$, bei dem die Zahl der Strecken erneut um Eins kleiner ist. Auf diese Weise setzen wir die Anzahl der Strecken systematisch herab, bis der Streckenzug nur noch aus der Strecke $A_0A_n = AB$ besteht. Bei jedem Übergang eines Streckenzuges in den folgenden kann die Länge des Streckenzuges niemals kleiner werden, sondern höchstens gleich bleiben. Hieraus folgt, daß die Länge des ursprünglichen Streckenzuges größer bzw. nicht kleiner als die der Strecke AB ist.

In der Elementargeometrie wird lediglich bewiesen, daß eine Strecke AB kürzer als jeder beliebige Streckenzug ist, der die Punkte A und B verbindet. Um den entsprechenden Satz für eine beliebige Verbindungskurve der Punkte A und B zu finden, muß zunächst die Länge einer beliebigen Kurve genau definiert werden. Die Länge einer Kreislinie wird in der Elementargeometrie als der Grenzwert der Umfänge einbeschriebener Vielecke definiert. Man betrachtet hierzu eine Folge von Vielecken, deren Seitenzahl in der Weise unbeschränkt wächst, daß die Länge der jeweils größten Seite gegen Null geht.

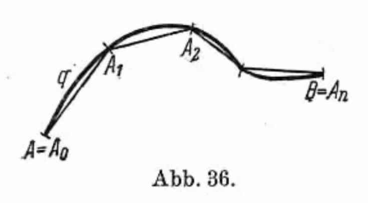


Abb. 36.

Die Länge einer beliebigen Kurve läßt sich ganz analog definieren. Gegeben sei eine Kurve q, welche zwei Punkte A und B miteinander verbindet (Abb. 36). Wir bewegen uns auf dieser Kurve in Richtung von A nach B und markieren nacheinander $(n+1)$ Punkte: $A_0 = A,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n = B$. Diese Punkte verbinden wir anschließend durch Strecken. So ergibt sich der Streckenzug $A_0A_1A_2 \ldots A_n$, den wir einbeschriebenen Streckenzug der Kurve nennen. Wir bilden schließlich eine Folge solcher einbeschriebenen Streckenzüge, bei denen die Anzahl der Strecken unbegrenzt wächst. Dabei sorgen wir dafür, daß die Länge der

größten Strecke bei unbegrenztem Wachsen der Streckenzahl gegen Null strebt. Man kann beweisen, daß die Längen der Umfänge der einbeschriebenen Vielecke unter diesen Bedingungen gegen einen Grenzwert streben, der dann als Länge der Kurve angesehen wird.

Da die Strecke AB kürzer ist als jeder andere Streckenzug, der die Punkte A und B verbindet, und da die Längen der Verbindungskurven dieser Punkte Grenzwerte der Längen entsprechender Streckenzüge sind, folgt nunmehr, daß die Strecke AB die kürzeste *aller* Verbindungskurven von A und B ist.

2. *Kürzeste Linien auf der Oberfläche einer Kugel.* Wir gehen jetzt zur Ermittlung der kürzesten Linien auf einer Kugeloberfläche über. Zunächst bemerken wir, daß durch zwei Punkte A und B auf einer Kugeloberfläche nur ein einziger Großkreis gelegt werden kann, wenn A und B nicht an den gegenüberliegenden Endpunkten ein und desselben Durchmessers liegen. Durch zwei Punkte, die an den Endpunkten ein und desselben Durchmessers liegen, lassen sich demgegenüber unendlich viele Großkreise ziehen. Diesen Fall werden wir vorläufig aus der Betrachtung ausschließen. Wenn wir von zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche sprechen, setzen wir immer voraus, daß diese Punkte nicht auf demselben Kugeldurchmesser liegen.

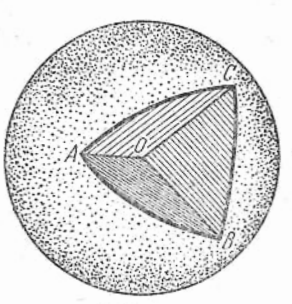


Abb. 37.

Wir ziehen nun durch zwei gegebene Punkte A und B einer Kugeloberfläche den Großkreis. Die Punkte A und B (die nicht Endpunkte ein und desselben Durchmessers sind) teilen diesen Großkreis in zwei ungleiche Teile. Der kleinere dieser Kreisbogen werde mit $\overset{\frown}{AB}$ bezeichnet.

Gegeben seien nun drei Punkte A, B und C einer Kugeloberfläche, die durch die Großkreisbogen $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ und $\overset{\frown}{CA}$ miteinander verbunden seien. Diese drei Kreisbogen bilden das sogenannte *sphärische Dreieck* ABC. Die Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ und $\overset{\frown}{CA}$ sind dann die Seiten dieses sphärischen Dreiecks. Es zeigt sich, daß auch für sphärische Dreiecke ein Satz gilt, der dem Satz über die Seitenlängen in ebenen Dreiecken entspricht.

Satz: *Jede Seite eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten.*

Wir betrachten auf der Oberfläche der Kugel mit dem Mittelpunkt O ein sphärisches Dreieck (Abb. 37). Die Seite $\overparen{AB}$ dieses Dreiecks gehöre zu einem Großkreis, d. h. zu einem Kreis mit dem Mittelpunkt O. In der Ebene dieses Kreises entspricht dem Bogen $\overparen{AB}$ der Zentriwinkel AOB. Ähnlich entsprechen den Seiten $\overparen{BC}$ und $\overparen{CA}$ in ihren Ebenen die Zentriwinkel BOC bzw. COA. Die Längen der Seiten $\overparen{AB}$, $\overparen{BC}$ und $\overparen{CA}$ sind den Zentriwinkeln AOB, BOC und COA proportional, weil sie Bögen von Großkreisen sind, die alle denselben Radius haben.

Die drei Ebenen unseres Großkreises bilden zusammen eine körperliche Ecke mit dem Eckpunkt O und den ebenen Winkeln AOB, BOC und COA. Die Längen der Seiten unseres sphärischen Dreiecks sind den entsprechenden ebenen Winkeln unserer körperlichen Ecke proportional. Da nun aber in einer körperlichen Ecke jeder ebene Winkel kleiner ist als die Summe der beiden anderen ebenen Winkel, gelten entsprechende Ungleichungen auch für die ihnen proportionalen Seiten des sphärischen Dreiecks, was zu beweisen war.

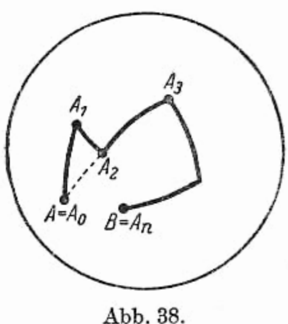


Abb. 38.

Gegeben sei nun eine Folge von Punkten $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ auf der Kugel, die durch Großkreisbogen A_0A_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ miteinander verbunden seien. Die Gesamtheit aller dieser Bogen werde ein die Punkte A_0 und A_n verbindender *sphärischer Streckenzug* genannt (Abb. 38).

In der Ebene folgt aus der Tatsache, daß jede Seite eines Dreiecks kleiner ist als die Summe der beiden anderen, der Satz, daß die Strecke AB kürzer ist als jeder die Punkte A und B verbindende Streckenzug. Auf der Oberfläche einer Kugel gilt der entsprechende Zusammenhang, d. h., der Satz, daß der Großkreisbogen AB kürzer ist als jeder die Punkte A und B verbindende Streckenzug, folgt aus der Tatsache, daß jede Seite eines sphärischen Dreiecks kürzer ist als die Summe der beiden anderen Seiten. Ferner ergibt sich auf der Kugeloberfläche wie in der Ebene die Länge einer beliebigen Kurve als Grenzwert entspre-

chender Streckenzüge. Da der Großkreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ kürzer ist als alle sphärischen Streckenzüge zwischen A und B, ist $\overset{\frown}{AB}$ auch kürzer als alle beliebigen Verbindungskurven von A und B.

Der Beweis dafür, daß der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ kürzer ist als ein beliebiger Streckenzug zwischen A und B, stellt im wesentlichen eine Wiederholung des Beweises für den entsprechenden ebenen Sachverhalt dar. Gegeben sei ein Großkreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ und ein Streckenzug $A_0A_1A_2A_3 \ldots A_n$ mit $A_0 = A$ und $A_n = B$.

In dem sphärischen Dreieck $A_0A_1A_2$ ist die Seite $\overset{\frown}{A_0A_2}$ kürzer als die Summe der Seiten $\overset{\frown}{A_0A_1}$ und $\overset{\frown}{A_1A_2}$[1]). Ersetzen wir nun $\overset{\frown}{A_0A_1}$ und $\overset{\frown}{A_1A_2}$ durch $\overset{\frown}{A_0A_2}$, so erhalten wir den neuen Streckenzug $A_0A_2A_3 \ldots A_n$, der sicher nicht länger ist als der ursprüngliche Streckenzug und eine Strecke weniger enthält. Weiter ersetzen wir die beiden Seiten $\overset{\frown}{A_0A_2}$ und $\overset{\frown}{A_2A_3}$ durch die eine Seite $\overset{\frown}{A_0A_3}$. Entweder wird hierbei die Länge des Streckenzuges kleiner oder sie bleibt ungeändert. Dieses Verfahren wird weiter fortgesetzt. Bei jeder Verringerung der Anzahl der Glieder des Streckenzuges wird die Länge des Streckenzuges niemals größer, sie bleibt entweder gleich oder nimmt ab. Es ergeben sich auf diese Weise neue Streckenzüge zwischen A und B. Schließlich gelangen wir zu einem Streckenzug, der nur noch ein Glied enthält, d. h. zu dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$. Hätte dieser dieselbe Länge wie der ursprüngliche Streckenzug $A_0A_1 \ldots A_n$, so würde dies bedeuten, daß die Punkte $A_0, A_1, \ldots, A_n$ auf dem Großkreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ gelegen haben. Andernfalls ist $\overset{\frown}{AB}$ wirklich kürzer als der Streckenzug $A_0A_1 \ldots A_n$.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß die Punkte A und B in den Endpunkten ein und desselben Kugeldurchmessers liegen. Dann gibt es unendlich viele Großkreisbogen, die A und B verbinden und AB als Durchmesser haben. Diese haben alle die gleiche

[1]) Liegen die Punkte A_0, A_1 und A_2 auf einem Großkreis, so ist die Seite $\overset{\frown}{A_0A_2}$ entweder gleich der Summe der Seiten $\overset{\frown}{A_0A_1}$ und $\overset{\frown}{A_1A_2}$ oder kleiner als sie. Der erste Fall tritt ein, wenn diese Summe kleiner als ein Halbkreis ist. Andernfalls gilt der zweite Fall. Beim Ersetzen der zwei Seiten $\overset{\frown}{A_0A_1}$ und $\overset{\frown}{A_1A_2}$ durch eine Seite wird die Länge des Streckenzuges dementsprechend kleiner oder bleibt unverändert. Diese Bemerkung gilt auch für die weitere Betrachtung.

Länge. Andererseits ist die Länge jeder anderen Verbindungskurve q von A und B größer als der halbe Großkreisbogen. Um dies einzusehen, nehmen wir auf q einen von A und B verschiedenen Punkt C, der q in die beiden Teile (AC) und (CB) zerlegt. Nun ziehen wir den halben Großkreis $\overset{\frown}{ACB}$. Dieser besteht aus den zwei Bogen $\overset{\frown}{AC}$ und $\overset{\frown}{CB}$. Jeder dieser Bogen ist kürzer als irgendeine andere Kurve zwischen den entsprechenden Punkten. Da unsere Kurve q kein Halbkreis ist, stimmt wenigstens einer der Teilbogen (AC) und (CB) nicht mit dem entsprechenden Bogen $\overset{\frown}{AC}$ oder $\overset{\frown}{CB}$ überein. Es möge etwa (AC) nicht mit $\overset{\frown}{AC}$ übereinstimmen. Dann ist (AC) länger als $\overset{\frown}{AC}$. Ferner ist (CB) entweder länger als $\overset{\frown}{CB}$ oder genauso lang wie $\overset{\frown}{CB}$. Der erste dieser Fälle tritt ein, wenn (CB) und $\overset{\frown}{CB}$ verschieden sind, der zweite, wenn beide Kurven übereinstimmen. Demzufolge ist q länger als $\overset{\frown}{ACB}$.

Für zwei diametral gegenüberliegende Punkte A und B gibt es unendlich viele kürzeste Verbindungslinien. Dies sind die A und B miteinander verbindenden halben Großkreisbogen.

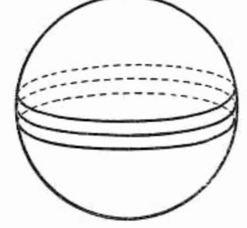
3. Zusatz. Die Oberfläche einer Kugel kann nicht in eine Ebene abgewickelt werden, d. h. so deformiert werden, daß die Längen der auf ihr liegenden Kurven ungeändert bleiben. Allerdings läßt sich ein hinreichend schmaler Streifen der Kugeloberfläche in die Ebene abwickeln, ohne daß sich die Längen der auf dem Streifen liegenden Kurven wesentlich ändern. Je schmaler hierbei der Streifen ist, um so kleiner ist die Verzerrung, d. h., um so genauer wird der Streifen in die Ebene abgewickelt. In der Sprache der Theorie der Grenzwerte würde man hierfür sagen: Die Verzerrung der Kurvenlängen ist in bezug auf die Streifenbreite eine Größe, die von höherer Ordnung klein wird.

Wird ein schmaler Streifen einer Kugeloberfläche in eine Ebene abgewickelt, so geht ein in diesem Streifen liegender Großkreisbogen in eine gerade Strecke über (und umgekehrt).

Beweis. Der im Kugelstreifen liegende Großkreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ ist die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten A und B. Gehen die Punkte A und B bei der Abwicklung des Streifens in die Ebene entsprechend in die Punkte A' und B' über, so geht der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ in eine Verbindungskurve der Punkte A' und B' über. Diese ist kürzer als alle anderen ebenen Kurven zwischen A' und B', d. h., AB geht in die Strecke $A'B'$ über.

Folgerung. Wir zeichnen auf der Oberfläche einer Kugel um einen Großkreisbogen einen schmalen Streifen und wickeln diesen in eine Ebene ab. Dieser Streifen geht dann in einen schmalen geradlinigen Streifen

über. Hierbei entspricht dem Großkreisbogen die Mittellinie des ebenen Streifens. Wird umgekehrt ein schmaler ebener geradliniger Streifen auf eine Kugeloberfläche aufgewickelt, so liegt der entsprechende Streifen auf der Kugeloberfläche längs eines Großkreises (Abb. 39).

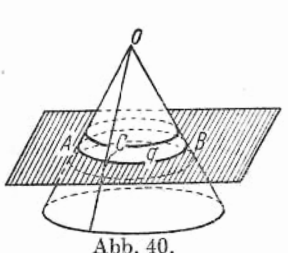


Wir fragen uns jetzt, in welche Figur ein schmaler Streifen, der einen Kleinkreisbogen (d. h. Bogen eines Kreises, der kein Großkreis ist) enthält, übergeht.

Hierzu machen wir zunächst die folgende Bemerkung: Ein Kegelmantel werde von einer Ebene geschnitten, die senkrecht zur Kegelachse ist. Die Schnittebene ist ein Kreis q. Die zwischen

Abb. 39.

der Spitze O und dem Kreis q liegenden Erzeugendenabschnitte sind alle gleich lang (in Abb. 40 ist beispielsweise $OA = OB = OC$). Wird nun der Kegelmantel längs der Erzeugenden OC aufgeschnitten und die so ent-



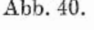


Abb. 40.

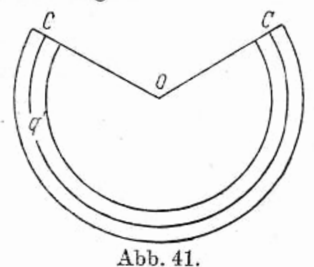


Abb. 41.

stehende Fläche in eine Ebene abgewickelt, so geht der Kreis q in den Bogen eines Kreises q' über, dessen Radius gleich OC ist. Ein auf dem Kegelmantel liegender schmaler Streifen, dessen Mittellinie von dem Kreis q gebildet wird, geht bei der Abwicklung in einen ebenen Streifen über, der als Mittellinie den Bogen q' hat (Abb. 41).

Wir wenden uns nun wieder der Oberfläche der Kugel zu (Abb. 42). Es sei O_1 der Mittelpunkt des Kleinkreises p_1. Durch O_1 und den Kugelmittelpunkt ziehen wir den Durchmesser AB. Der Großkreis p mit dem Durchmesser AB möge den Kleinkreis p_1 im Punkt C treffen. Ferner seien r der Radius von p_1, R der Kugelradius und α der Winkel O_1CO. Dann gilt

$$\cos\alpha = \frac{r}{R}.$$

Nun ziehen wir an p im Punkt C die Tangente bis zum Punkt D, in dem die Tangente die Verlängerung des Durchmessers AB schneidet. Es ist

$\sphericalangle\, CDO = \sphericalangle\, O_1CO = \alpha$ (da die Schenkel dieser Winkel aufeinander senkrecht stehen). Im Dreieck OCD gilt

$$CD = R \operatorname{ctg} \alpha = R \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$$

$$= R \left[\frac{r}{R} : \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right] = \frac{r R}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Wir drehen nun die gesamte Figur um AB als Achse. Die Gerade CD beschreibt hierbei einen Kegelmantel, der Kreis p eine Kugel mit dem Radius R. Kegelmantel und Kugel berühren sich längs des Kreises p_1.

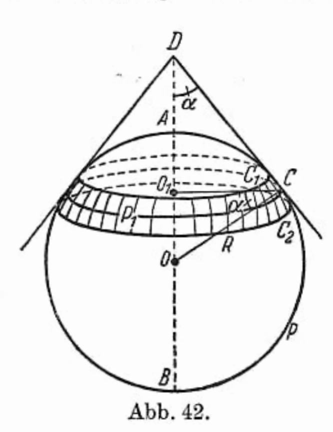


Abb. 42.

Ein kleines Stück C_1C_2 des Kreises p, das den Punkt C enthält, darf angenähert als Stück der Tangente in C angesehen werden[1]). Bei der Drehung um AB beschreibt das Stück C_1C_2 einen Kugelstreifen, der den Kleinkreis p_1 enthält. Dieser Streifen stimmt näherungsweise mit einem Streifen des Kegelmantels überein. (Das ist der Streifen, der durch Drehung des an die Stelle des Bogens C_1C_2 getretenen Tangentenabschnittes entsteht.) Wir schneiden nun diesen Streifen längs C_1C_2 auf und wickeln ihn in eine Ebene ab. Hierbei geht der Kreis p_1 in den Bogen eines Kreises über, dessen Radius gleich CD, d. h. gleich

$$l = \frac{R r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

ist. Andererseits wird ein schmaler Streifen der Kugeloberfläche mit dem Kreis p_1 als Mittellinie in einen ebenen Streifen abgewickelt, der einen Bogen des Kreises mit dem Radius l umgibt.

Wickeln wir umgekehrt einen schmalen ebenen Streifen, der als Mittellinie einen Bogen des Kreises mit dem Radius R hat, auf eine Kugel mit dem Radius l auf, so liegt der entsprechende Streifen auf der Kugeloberfläche längs eines Kleinkreises. Der Radius dieses Kreises berechnet sich aus der Formel

$$l = \frac{R r}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Wie man leicht bestätigt, ist

$$r = \frac{R l}{\sqrt{R^2 + l^2}}.$$

[1]) Der hierbei begangene Fehler wird im Vergleich zu der Länge von C_1C_2 von höherer Ordnung klein.

KAPITEL II

EINIGE EIGENSCHAFTEN EBENER UND RÄUMLICHER KURVEN UND DAMIT ZUSAMMENHÄNGENDE PROBLEME

§ 5. Tangente und Normale ebener Kurven und damit zusammenhängende Probleme

1. Tangente. Gegeben seien eine ebene oder räumliche Kurve q und ein auf dieser Kurve liegender Punkt A (Abb. 43). Wir betrachten sodann einen weiteren Punkt B dieser Kurve und ver-

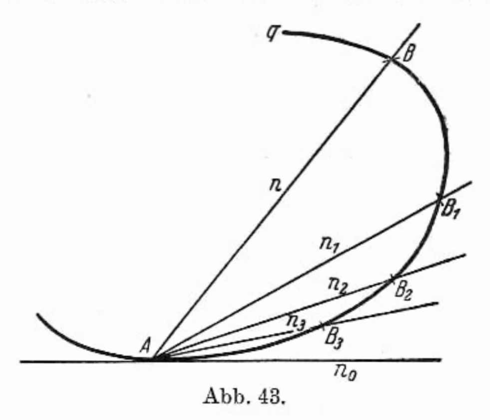


Abb. 43.

binden A und B durch eine Gerade. Diese werde mit n bezeichnet. Sie stellt eine sogenannte Sekante dar. Wir lassen nun den Punkt B auf der Kurve q unbeschränkt an den Punkt A heranrücken. Die Sekante n beschreibt dabei eine Drehbewegung um den Punkt A. Nimmt der Punkt B nämlich nacheinander die Lage der Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ein, so hat die Sekante n jeweils die Lage der Geraden $AB_1, AB_2, AB_3, \ldots$. Strebt der Punkt B gegen den Punkt A, so strebt die Sekante n gegen eine bestimmte *Grenzlage* (die Gerade n_0). Die Gerade n_0 wird *Tangente an die Kurve q im Punkt A* genannt.

Wir denken uns auf der Kurve q einen materiellen Punkt bewegt, der im Punkte A plötzlich losgelassen wird. Infolge der Trägheit beginnt dieser, sich auf der Tangente n_0 zu bewegen.

2. Normale. Wir setzen jetzt voraus, daß die Kurve q in einer bestimmten Ebene liegt, also eine ebene Kurve ist. Unter der *Normalen* der Kurve q im Punkte A versteht man die Gerade MN, die durch den Punkt A senkrecht zur Tangente n_0 in diesem Punkt an die Kurve q verläuft (Abb. 44, S. 39).

3. Kürzeste Entfernung zwischen zwei Kurven. Wir betrachten einen Punkt A, der sich nur auf einer bestimmten Linie q bewegen kann. Es sei P die Resultierende aller im Punkte A wirkenden Kräfte (Abb. 45). Wir zerlegen die Kraft P in zwei Komponenten – eine tangentiale Komponente P_1 (die die Richtung der Tangente an die Kurve q im Punkte A hat) und eine radiale Komponente P_2 (in Richtung der Normalen der Kurve q im Punkte A). Die tangentiale Komponente bewirkt die Bewegung des Punktes A auf der Kurve q. Der Punkt A befindet sich daher in Ruhelage,

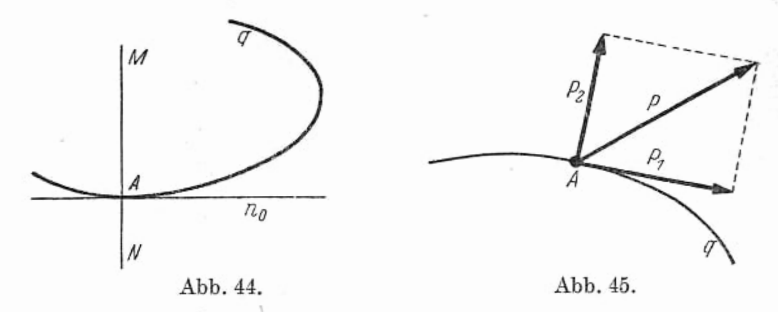


Abb. 44. Abb. 45.

wenn keine tangentiale Komponente vorhanden ist, d. h., wenn P und P_2 zusammenfallen, was wiederum bedeutet, daß die Kraft P die Richtung der Normalen im Punkte A an die Kurve q hat.

Seien nun zwei Kurven q und q_1 gegeben. Wir wollen die kürzeste aller Kurven r ermitteln, deren einer Endpunkt A auf q und deren anderer Endpunkt B auf q_1 liegt (Abb. 46). Die Kurven q und q_1 seien unbeweglich. Wir betrachten einen elastischen Faden r, dessen Endpunkte A und B auf den Kurven q und q_1 verschiebbar sind (man kann sich z. B. vorstellen, daß in den Punkten A und B kleine Rädchen angebracht sind, die auf den Kurven q und q_1 rollen und an denen der Faden befestigt ist). Der Faden r strebt dann auf Grund seiner Elastizität in die Lage, in der er die kleinste Länge hat. Es sei A_0B_0 die Lage, in der sich der Faden im Gleichgewichtszustand befindet. Die Kurve A_0B_0, welche die Punkte A_0 (auf q) und B_0 (auf q_1) verbindet, ist offenbar

eine Gerade (wäre A_0B_0 nicht geradlinig, so könnte man die Kurve bei unveränderlicher Lage der Endpunkte weiter verkürzen). Da sich der Faden in der Lage A_0B_0 im Gleichgewicht befindet, muß sich auch sein Endpunkt A_0 im Gleichgewicht befinden. Im Punkt A_0 greift eine Spannkraft an, die die Richtung der Strecke A_0B_0 hat. Auf Grund der oben erwähnten Gleichgewichtsbedingungen stellt A_0B_0 die Normale der Kurve q im Punkte A_0 dar. Entsprechend läßt sich beweisen, daß A_0B_0 auch die Normale von q_1 im Punkte B_0 ist.

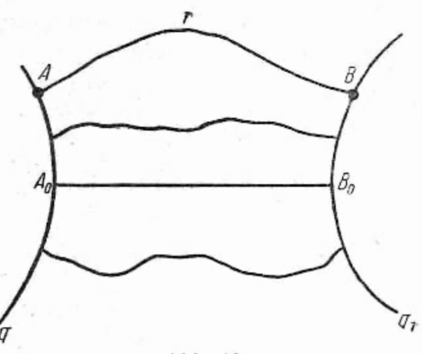


Abb. 46.

Somit gilt: *Die kürzeste Verbindungslinie zweier Kurven ist eine beiden Kurven gemeinsame Normale.*

Ebenso ist die kürzeste Verbindungslinie eines Punktes A mit einer Kurve q eine durch den Punkt A gehende Normale der Kurve q.

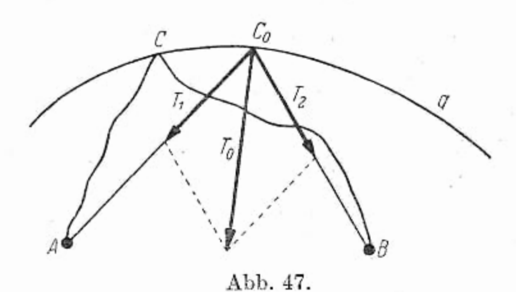


Abb. 47.

4. Reflexion an einer Kurve. Es sei q eine gegebene Kurve. Wir betrachten alle möglichen Kurven ACB, die zwei gegebene Punkte A und B miteinander verbinden und mit der Kurve q einen Punkt C gemeinsam haben.

Wir nehmen nun einen elastischen Faden $\overset{\frown}{ACB}$, der in seinen Endpunkten A und B festgehalten wird und dessen einer Punkt C auf der Kurve q verschoben wird (Abb. 47).

Es sei AC_0B die kürzeste aller Verbindungskurven der Punkte A und B, die mit der Kurve q einen Punkt C_0 gemeinsam haben. Der Faden befinde sich in dieser Lage im Gleichgewicht.

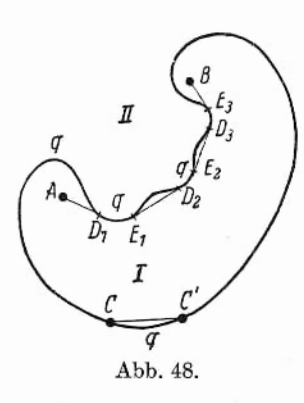


Abb. 48.

Die beiden Teile AC_0 und C_0B der kürzesten Verbindung sind offenbar gerade Strecken. Der auf der Kurve liegende Punkt C_0 des Fadens befindet sich im Gleichgewicht. In diesem Punkte wirken die gleich großen Spannkräfte[1]) T_1 in Richtung der Strecke C_0A und T_2 in Richtung der Strecke C_0B, so daß ihre Resultierende T_0 in die Richtung der Halbierenden des Winkels AC_0B zeigt. Wegen der Gleichgewichtsbedingung muß T_0 in Richtung der Normalen der Kurve q im Punkte C_0 wirken. Dies bedeutet, daß die Halbierende des Winkels AC_0B mit der Kurvennormale im Punkte C_0 zusammenfällt.

Die kürzeste aller Kurven, die zwei gegebene Punkte A und B miteinander verbinden und mit einer gegebenen Kurve q einen Punkt C_0 gemeinsam haben, ist der aus zwei Abschnitten bestehende Streckenzug AC_0B, dessen Eckpunkt C_0 so auf q liegt, daß die Normale von q in C_0 Halbierende des Winkels AC_0B ist.

5. *Kürzeste Entfernung in einem Gebiet.* Wir betrachten jetzt ein ebenes Gebiet, das von einer oder mehreren Kurven begrenzt wird. Das Gebiet kann endlich (z. B. Gebiet I in Abb. 48) oder unendlich sein (z. B. das Gebiet II aus Abb. 48, das durch Fortnahme des Gebietes I aus der Ebene entsteht). Wir suchen innerhalb des Gebietes I die kürzeste Verbindung zweier Punkte A und B dieses Gebietes. Die Kurve $\overset{\frown}{AB}$ fällt mit der Gleichgewichtslage eines im Gebiet I befindlichen und in den Punkten A und B befestigten elastischen Fadens zusammen. Unter Umständen enthält $\overset{\frown}{AB}$ Teile des Randes q des Gebietes I.

Nun sei $s_0 = AD_1E_1D_2E_2 \ldots D_nE_nB$ die kürzeste aller Verbindungskurven s. Sie bestehe aus den Bogen $E_1D_1, E_2D_2, \ldots, E_nD_n$ des Randes (in Abb. 48: $n = 3$) und aus den Bogen AD_1,

[1]) Die Spannkraft ist in allen Punkten des Fadens gleich.

$E_1D_2, \ldots, E_nB$, die bis auf die Endpunkte ganz im Innern des Gebietes I liegen. Offenbar ist jeder der Bogen $AD_1, E_1D_2, \ldots, E_nB$ Teil einer Geraden.

Jeder der zu s_0 gehörenden Bogen $D_1E_1, D_2E_2, \ldots, D_nE_n$ des Randes liegt in bezug auf das Gebiet I konvex. Um dies einzusehen, betrachten wir einen beliebigen hinreichend kleinen Bogen CC' von q. Liegt CC' konvex in bezug auf II, so gehört die Sehne zum Gebiet I. Da diese Sehne kürzer als das Kurvenstück CC' ist, ließe sich die Verbindungskurve s_0, falls sie ein solches in bezug auf II konvexes Stück des Randes q enthalten würde, durch Ersetzen des Kurvenstücks CC' durch die in I gelegene Sehne CC' weiter verkürzen. Somit kann die kürzeste Verbindungskurve lediglich solche Teile des Randes enthalten, die in bezug auf I konvex liegen.

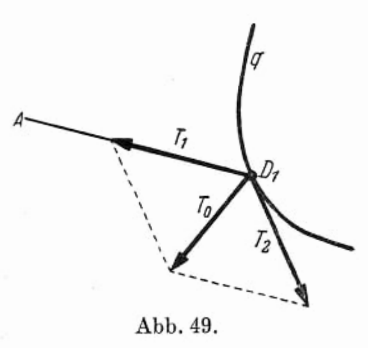


Abb. 49.

Die zu s_0 gehörenden Sehnen $AD_1, E_1D_2, \ldots, E_{n-1}D_n, E_nB$ tangieren die Kurve q in den Punkten $D_1, E_1, D_2, E_2, \ldots, D_n, E_n$ (Abb. 48).

In diesen Punkten treffen nämlich je zwei Teile des Fadens zusammen, beispielsweise in D_1 die Sehne AD_1 und das Stück D_1E_1 der Kurve q. Hier wirken die Spannkraft T_1 von AD_1 in Richtung der Sehne D_1A (Abb. 49) und die Spannkraft T_2 von D_1E_1 in Richtung der Tangente an q im Punkte D_1. Wäre der Winkel zwischen den Richtungen von T_1 und T_2 von 180° verschieden, so würde die Resultierende T_0 der Kräfte T_1 und T_2 eine Verschiebung des Punktes D_1 hervorrufen (Abb. 49), d. h., der Faden befände sich nicht im Gleichgewicht. Der Winkel muß somit gleich 180° sein, d. h. aber, die Sehne AD_1 tangiert die Kurve q im Punkte D_1.

Die kürzeste Verbindungskurve der Punkte A und B im Gebiet I besteht somit aus den tangential gerichteten Sehnen AD_1, $E_1D_1, \ldots, E_nB$ und den in bezug auf das Gebiet I konvex liegenden Bogen $D_1E_1, D_2E_2, \ldots, D_nE_n$ des Randes.

Bei der Untersuchung kürzester Kurven auf Polyederflächen (S. 9) wurde ein bestimmter Fall aus der Betrachtung ausgeschlossen. Auf Grund

der zuletzt durchgeführten Überlegungen können wir diese Einschränkung nun fallen lassen.

§ 6. Einiges aus der Theorie ebener und räumlicher Kurven

1. Krümmungskreis. Gegeben sei eine ebene Kurve q (Abb. 50). Im Punkte A dieser Kurve zeichnen wir die Tangente KL und die Normale MN. Außerdem zeichnen wir alle möglichen Kreise, welche die Gerade KL im Punkte A berühren (d. h. mit der Kurve q im Punkte A eine gemeinsame Tangente besitzen). Ihre Mittelpunkte liegen offenbar auf der Normalen MN.

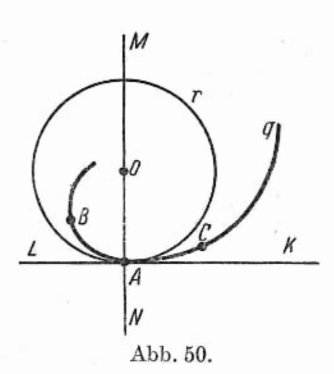


Abb. 50.

Unter all diesen Kreisen gibt es einen, der im Punkte A dem Verlauf der Kurve q am nächsten kommt. In unserer Abbildung ist dies der Kreis r. Dieser Kreis wird *Krümmungskreis* genannt. Ein kleines Stück BC der Kurve q, das den Punkt A enthält, kann angenähert als Teil des Kreises r angesehen werden. Je kleiner das Stück BC ist, um so größer wird die Genauigkeit sein, mit der es durch einen Teil des Kreises r ersetzt werden kann. Der Mittelpunkt O des Kreises r heißt *Krümmungsmittelpunkt.* Ein kleines Stück BC der Kurve q, das den Punkt A enthält, kann somit angenähert als Teil eines Kreises betrachtet werden, dessen Mittelpunkt im Krümmungsmittelpunkt O liegt.

Der Mittelpunkt eines Kreises liegt stets im Schnittpunkt von zwei seiner Radien. Da die Radien aber gleichzeitig Normalen des Kreises darstellen, können wir sagen, daß der Mittelpunkt eines Kreises im Schnittpunkt seiner Normalen liegt.

Wir betrachten jetzt eine beliebige Kurve q, einen auf ihr liegenden Punkt A und einen kleinen Bogen BC, der den Punkt A enthält (Abb. 51). Dieser Bogen kann angenähert als ein Teil des Berührungskreises mit dem Mittelpunkt O aufgefaßt werden. Wie findet man nun den Mittelpunkt dieses Kreises (den Krümmungsmittelpunkt)?

Wird der Bogen BC angenähert als Teil des Krümmungskreises betrachtet, so kann das folgende Verfahren zur Konstruk-

tion des Krümmungszentrums angewandt werden. Man zeichnet einfach im Punkte A und in einem beliebigen anderen Punkte A_1 der Kurve q die Normalen der Kurve. Diese schneiden sich in einem Punkte O_1. Betrachten wir nun den Bogen BC als Teil des Krümmungskreises, so wird der Punkt O_1 auf Grund des oben Gesagten zum Mittelpunkt des Krümmungskreises, d. h. zum Krümmungsmittelpunkt.

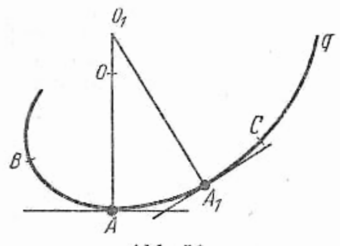


Abb. 51.

Anmerkung. Unsere Konstruktion des Mittelpunktes des Krümmungskreises stellt ein Näherungsverfahren dar. Dieses wird um so genauer sein, je kleiner der Bogen BC ist. Der Krümmungsmittelpunkt der Kurve q im Punkte A kann exakt als die Grenzlage definiert werden, gegen welche die Schnittpunkte der Normalen im Punkte A mit den Normalen im benachbarten Punkte A_1 streben, wenn der Punkt A_1 unbegrenzt gegen A rückt. Je näher A_1 bei A liegt, um so näher liegt der Schnittpunkt O_1 der Normalen bei der Grenzlage O. Der Krümmungskreis kann dann als der Kreis mit dem Mittelpunkt in O und dem Radius OA definiert werden.

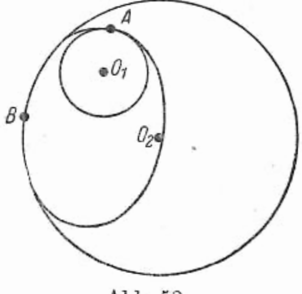


Abb. 52.

Beispiel. In Abb. 52 sind nach dem obigen Näherungsverfahren die Krümmungsmittelpunkte und Krümmungskreise einer Ellipse in den Scheitelpunkten A und B konstruiert.

2. *Raumkurven*. Wir haben bis jetzt nur ebene Kurven betrachtet. Wir gehen nun zum Studium von Raumkurven über. Natürlich gibt es Kurven, die nicht innerhalb einer Ebene liegen. Solche Kurven sind z. B. die Schraubenlinien.

Auf der Mantelfläche eines Zylinders sei eine Schraubenlinie q gegeben. Würde die Kurve q in einer Ebene Q liegen, so müßte sie sich als Schnittkurve dieser Ebene mit dem Zylindermantel darstellen lassen. Hierbei sind zwei Fälle möglich: Entweder schneidet die Ebene Q die Achse des Zylinders, oder sie verläuft zur Zylinderachse parallel. Schneidet die Ebene die Achse des Zylinders, so ist die Berandung der Schnittfläche eine geschlossene Kurve (eine Ellipse, Abb. 53), keinesfalls aber eine Schraubenlinie, die keine geschlossene Kurve ist. Verläuft die Ebene jedoch zur Zylinderachse parallel, so schneidet sie entweder die Mantelfläche in zwei Geraden,

oder sie berührt den Zylindermantel und hat dann mit ihm eine Gerade gemeinsam, oder sie schneidet den Zylinder überhaupt nicht. In jedem Falle ist also die Schnittkurve der Ebene mit dem Zylindermantel keine Schraubenlinie.

Die *Tangente* an eine Raumkurve wird genauso definiert, wie im Falle ebener Kurven. Unter einer *Normalen* einer Raumkurve q im Punkte A versteht man jede Gerade, die durch den Punkt A geht und senkrecht zur Tangente im Punkte A gerichtet ist. Da es zu einer Geraden im Raume in jedem ihrer Punkte unendlich viele Senkrechten gibt, gibt es zu einer Kurve q in jedem Punkte A unendlich viele Normalen. Diese erfüllen die ganze Ebene, die senkrecht auf der Tangente im Punkte A steht (Abb. 54).

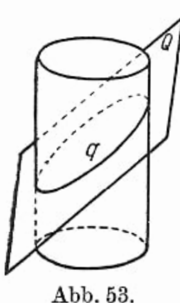


Abb. 53.

3. *Schmiegebene.* Wir betrachten auf einer Kurve q einen Punkt A und in diesem Punkte die Tangente MN an die Kurve q (Abb. 55). Ferner sei A_1 ein Punkt der Kurve, der hinreichend nahe bei A liegt. Ein kleiner Bogen AA_1 der Raumkurve q kann dann annähernd als ein Teil einer ebenen Kurve betrachtet werden, und zwar liegt diese Kurve annähernd in der durch die Tangente MN und den Punkt A_1 hindurchgelegten Ebene Q. Die Ebene Q heißt *Schmiegebene* der Kurve q im Punkte A.

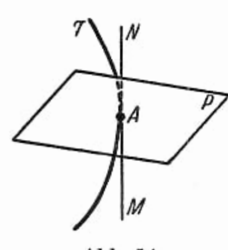


Abb. 54.

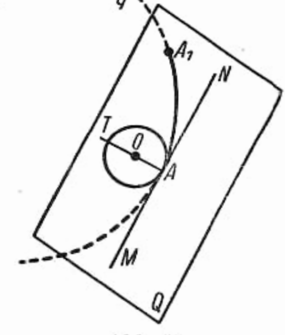


Abb. 55.

Anmerkung. Wir wollen eine genaue Definition der Schmiegebene geben. Hierzu legen wir durch die Tangente MN und einen beliebigen anderen Punkt A_1 der Kurve die Ebene Q'. Der Punkt A_1 bewege sich nun auf der Kurve q gegen den Punkt A. Dabei führt die Ebene Q' eine Drehung um MN aus und nähert sich einer bestimmten Grenzlage, der Ebene Q.

Diese Ebene heißt *Schmiegebene*. Liegt der Punkt A_1 hinreichend nahe bei A, so kommt die durch MN und A_1 gelegte Ebene Q' der Grenzlage Q beliebig nahe. Wir können daher Q' annähernd als Schmiegebene betrachten.

4. Hauptnormale. Unter der Hauptnormalen einer Kurve q im Punkte A versteht man diejenige Normale AT, welche in der Schmiegebene liegt (Abb. 55).

Liegt die Kurve q ganz in einer Ebene Q (d. h., ist q eine ebene Kurve), so ist die Ebene Q für alle Punkte der Kurve q auch Schmiegebene, und alle in dieser Ebene liegenden Normalen von q sind Hauptnormalen.

5. Krümmungskreis einer Raumkurve. Wir betrachten wieder eine Raumkurve q und einen auf ihr liegenden Punkt A. Ein kleines, den Punkt A enthaltenes Stück von q kann annähernd als ebenes Kurvenstück betrachtet werden, das in der die Kurve q im Punkte A berührenden Ebene Q liegt. Jedes ebene Kurvenstück aber kann seinerseits angenähert als Teil des Krümmungskreises betrachtet werden, der in derselben Ebene liegt und mit der Kurve eine gemeinsame Tangente besitzt. Dies bedeutet, daß man ein kleines Stück der Kurve q, das den Punkt A enthält, angenähert als Teil eines in der Tangentialebene liegenden Kreises betrachten kann (Abb. 55). Dieser Kreis heißt *Krümmungskreis* der Raumkurve. Sein Mittelpunkt O liegt auf der Hauptnormalen der Kurve. Hinreichend kleine Bogen ebener und räumlicher Kurven können somit annähernd als Bogen der entsprechenden Krümmungskreise betrachtet werden. Je kleiner hierbei die Kurvenbogen sind, desto größer ist die Genauigkeit, mit der sie durch Bogen ihrer Krümmungskreise ersetzt werden können.

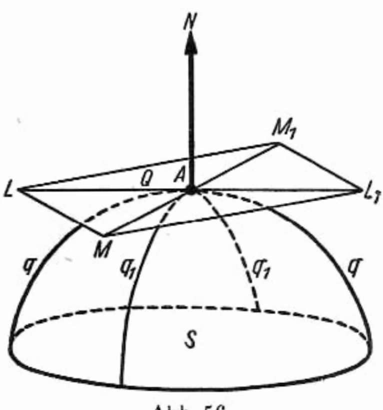


Abb. 56.

Alle diese Tatsachen aus der Kurventheorie werden im folgenden von Nutzen sein.

§ 7. Einiges aus der Flächentheorie

1. Tangentialebene und Normale einer Fläche. Wir betrachten eine Fläche S und auf dieser einen Punkt A (Abb. 56). Ein kleines

Stück der Fläche um den Punkt A kann annähernd als Teil einer Ebene Q betrachtet werden, der sogenannten *Tangentialebene* der Fläche S im Punkte A. Die Tangentialebene ist die Ebene, in der die Tangenten der auf der Fläche S befindlichen und durch A verlaufenden Kurven, genommen im Punkte A, liegen.

Ziehen wir auf S zwei durch A verlaufende Kurven q und q_1, deren Tangenten LL_1 und MM_1 im Punkte A nicht zusammenfallen, so stellt die durch die Geraden LL_1 und MM_1 festgelegte Ebene die Tangentialebene dar.

Unter der *Normalen* einer Fläche S im Punkte A versteht man diejenige Gerade, die durch A senkrecht zu der in A an die Fläche S gelegten Tangentialebene verläuft.

Die Normale AN einer Fläche in einem Punkt A ist zugleich auch Normale aller durch A verlaufenden und auf dieser Fläche liegenden Kurven (wobei sie keinesfalls deren Hauptnormale in diesem Punkte zu sein braucht).

Beispiele. Die Normale einer Kugeloberfläche in irgendeinem Punkte fällt mit dem Radius der Kugel in diesem Punkte zusammen.

Die Normale eines Zylindermantels in irgendeinem Punkte fällt mit dem Radius des Schnittkreises des Zylinders in diesem Punkte zusammen.

Anmerkung. Eine Kurve braucht nicht unbedingt in jedem ihrer Punkte eine Tangente zu haben. Beispielsweise hat ein Streckenzug in keinem seiner Eckpunkte eine Tangente. Ebenso hat eine Raumkurve nicht unbedingt eine Tangentialebene und eine Fläche nicht unbedingt eine Tangentialebene sowie eine Normale usw. Z. B. hat ein Kegelmantel an der Spitze weder eine Tangentialebene noch eine Normale.

Wir beschränken uns daher in allen weiteren Betrachtungen nur auf „glatte" Kurven, d. h. Kurven, die in jedem Punkte eine Tangente, eine Tangentialebene und einen Krümmungsmittelpunkt besitzen, und auf „glatte" Flächen, d. h. Flächen, die in jedem Punkte eine Normale haben. Auch auf Flächen werden wir lediglich „glatte" Kurven betrachten.

2. Die Gleichgewichtsbedingungen eines Flächenpunktes. Wir betrachten einen Punkt A, der sich nur auf einer gewissen Fläche S bewegen kann. Es sei P die Resultierende aller auf diesen Punkt wirkenden Kräfte (Abb. 57). Die Tangentialkomponente der Kraft P (d. h. die Komponente, die in der zum Punkte A gehörenden Tangentialebene Q von S liegt) bezeichnen wir mit P_1, die Normalkomponente mit P_2. Eine von Null verschiedene Tangentialkomponente P_1 bewirkt stets eine Verschiebung des Punktes

A auf der Fläche. Demzufolge muß die Tangentialkomponente P_1, wenn sich der Punkt A im Gleichgewicht befinden soll, gleich Null sein. Dies bedeutet aber, daß die Kraft P mit ihrer Normalkomponente P_2 zusammenfällt. Es gilt also: *Für das Gleichgewicht eines auf einer Fläche liegenden Punktes A ist notwendig, daß die Resultierende P aller auf den Punkt A wirkenden Kräfte in Richtung der Flächennormale in diesem Punkt wirkt.*

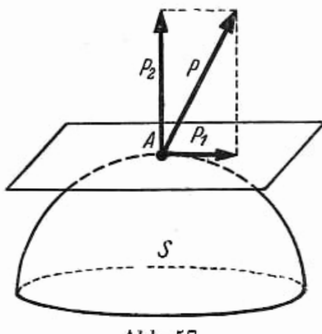


Abb. 57.

3. *Kürzeste Kurven im Raum.* Handelt es sich darum, die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten zweier Raumkurven zu bestimmen, so braucht man nur die in § 5, 3 angestellte Überlegung zu wiederholen, um zu erkennen, daß die kürzeste Verbindungslinie der Punkte zweier Kurven ein Geradenstück ist, das auf der diesen beiden Kurven gemeinsamen Normalen liegt.

Insbesondere ist die kürzeste Entfernung zweier sich nicht schneidenden Geraden im Raume durch eine Strecke ihrer gemeinsamen Senkrechten gegeben.

Entsprechend zeigt man, daß die kürzeste Verbindung zwischen zwei Flächen eine Strecke ist, die auf einer diesen beiden Flächen gemeinsamen Normalen liegt.

KAPITEL III

GEODÄTISCHE LINIEN

§ 8. Der Bernoullische Satz über geodätische Linien

1. Gleichgewicht eines elastischen Fadens auf einer Fläche. Auf einer Fläche S seien zwei Punkte A und B gegeben. Diese Punkte können durch unendlich viele Kurven miteinander verbunden werden, die alle auf der Fläche liegen. Die kürzeste dieser Kurven werde mit q bezeichnet. Unsere Aufgabe soll es sein, die Eigenschaften dieser kürzesten Verbindung zu untersuchen.

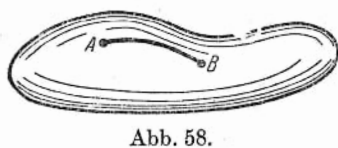


Abb. 58.

Wir stellen uns auf der Fläche einen gespannten elastischen Faden vor, der in den Punkten A und B befestigt sei (Abb. 58). Dieser Faden befindet sich im Gleichgewicht, sobald er die Lage der kürzesten Kurve q eingenommen hat. Bringen wir nämlich den Faden ein wenig aus seiner Gleichgewichtslage, so vergrößern wir seine Länge. Da der Faden aber das Bestreben hat, sich zu verkürzen, wird er von neuem die Lage q einnehmen. *Ein Faden, der entlang der kürzesten Kurve gespannt ist, befindet sich im stabilen Gleichgewicht.*

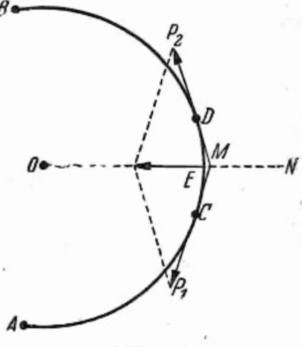


Abb. 59.

Wir beginnen mit der Untersuchung der Gleichgewichtslagen, die ein elastischer Faden auf einer Fläche einnehmen kann.

Wir betrachten zunächst einen Faden $\overset{\frown}{AB}$, der die Form eines Kreisbogens hat (Abb. 59). Auf das kleine Stück $\overset{\frown}{CD}$ unseres Fadens wirken die Spannkräfte der übrigen Teile des Fadens,

nämlich im Punkte C die Spannkraft des Fadenteiles CA und im Punkte D die des Teiles DB. Diese Spannkräfte haben die Richtung der Tangente im Punkte C bzw. D. Wir bezeichnen sie mit P_1 und P_2. Die Kräfte P_1 und P_2 sind gleich groß, da sich der Teil $\overset{\frown}{CD}$ unseres Fadens anderenfalls nicht im Gleichgewicht befände. Wir wollen die Resultierende der Kräfte P_1 und P_2 ermitteln.

Es sei M der Schnittpunkt der zu den Punkten C und D gehörigen Tangenten, in deren Richtungen die Kräfte P_1 und P_2 wirken. Die Angriffspunkte der Kräfte P_1 und P_2 verlagern wir in den Punkt M. Offenbar zeigt die Resultierende in Richtung des Kreismittelpunktes O (gemeint ist der Mittelpunkt des Kreises, auf dem der Faden $\overset{\frown}{AB}$ ruht). Der Mittelpunkt des Kreisbogens $\overset{\frown}{CD}$ werde mit E bezeichnet. Die Resultierende der auf $\overset{\frown}{CD}$ wirkenden Spannkräfte verläuft dann durch den Punkt E in Richtung des Radius EO. Da EO die Normale des Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$ im Punkte E ist, folgt nunmehr: *Die Resultierende der auf den Kreisbogen* $\overset{\frown}{CD}$ *wirkenden Spannkräfte verläuft durch den Mittelpunkt* E *dieses Kreisbogens und hat die Richtung der Normalen von* $\overset{\frown}{CD}$ *im Punkte* E.

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu. Auf einer beliebigen Fläche sei ein elastischer Faden gespannt, der in den Punkten A und B befestigt sei. Der Lage des Fadens auf der Fläche entspreche die Kurve q.

Wir greifen ein kleines Stück $\overset{\frown}{CD}$ dieses Fadens heraus.[1]) Auf $\overset{\frown}{CD}$ wirken die Spannkräfte P_1 und P_2, die in den Punkten C und D angreifen und die Richtungen der in diesen Punkten an q gelegten Tangenten haben. Das kleine Stück der Kurve kann als Teil des zum Mittelpunkt E von CD gehörigen Tangentialkreises betrachtet werden. Der Radius EO dieses Kreises hat die Richtung der Hauptnormalen von q im Punkte E. Die Resultierende der auf ein Kreisbogenstück wirkenden Spannkräfte zeigt in die Richtung des durch die Mitte dieses Kreisbogenstückes verlaufenden Radius, d. h. in unserem Falle in die Richtung von EO. Es gilt also: *Die Resultierende der Spannkräfte, die auf ein*

[1]) Da das Stück $\overset{\frown}{CD}$ als hinreichend klein angenommen wird, können wir es als Stück eines Kreisbogens betrachten und wieder Abb. 59 heranziehen.

kleines Stück CD unseres Fadens wirken, verläuft durch den Mittelpunkt E dieses Stückes in Richtung der Normalen EO im Punkte E.

Es bereitet jetzt keine Schwierigkeit mehr, Bedingungen zu ermitteln, unter denen sich ein Faden im Gleichgewicht befindet. Befindet sich der gesamte Faden im Gleichgewicht, so befindet sich auch jedes einzelne Stück $\overset{\frown}{CD}$ des Fadens im Gleichgewicht. Für das Gleichgewicht eines Stückes $\overset{\frown}{CD}$ ist nun aber erforderlich, daß die Resultierende der auf $\overset{\frown}{CD}$ wirkenden Spannkräfte die Normalenrichtung der Fläche hat. Diese Resultierende zeigt andererseits in die Richtung der Hauptnormalen EO von q. D. h., EO muß im Punkte E gleichzeitig Hauptnormale der Kurve q und Normale der Fläche S sein.

Wir haben damit folgenden Satz bewiesen: *Für das Gleichgewicht eines auf einer Fläche S gespannten elastischen Fadens q ist erforderlich, daß in jedem Punkte des Fadens die Hauptnormale von q mit der Flächennormale zusammenfällt.*

2. Geodätische Linien. Eine Kurve q, die auf einer Fläche S liegt, heißt *Geodätische,* wenn ihre Hauptnormale in jedem Punkt mit der Flächennormalen zusammenfällt.

Eine geodätische Linie könnte offenbar auch als eine solche Kurve der Fläche definiert werden, deren Tangentialebene in jedem Kurvenpunkt die Flächennormale in diesem Punkte enthält. Um dies einzusehen, nehmen wir einen Punkt A einer Kurve q, die auf einer Fläche S liegt. Die Normale der Fläche S im Punkte A ist gleichzeitig Normale jeder durch A verlaufenden Kurve q. Sie wird zur Hauptnormalen, wenn sie in der Tangentialebene von q liegt.

Der oben bewiesene Satz kann also auch folgendermaßen formuliert werden:

Ein auf einer Fläche gespannter Faden befindet sich im Gleichgewicht, wenn er auf einer geodätischen Linie dieser Fläche liegt.

Beispiel 1. Ein Faden, der auf einen Zylindermantel gespannt ist, hat die Form einer Schraubenlinie, wie oben erkannt wurde. *Geodätische eines Zylindermantels sind also die auf ihm liegenden Schraubenlinien.* Alle Hauptnormalen einer Schraubenlinie fallen mit den entsprechenden Normalen des Zylindermantels zusammen, während die Normalen des Zylindermantels ihrerseits Radien entsprechender Schnittkreise sind, d. h., *die Radien der Schnittkreise liegen auf den Hauptnormalen der Schraubenlinien.*

Beispiel 2. Wir wollen untersuchen, wann eine ebene Kurve q Geodätische einer Fläche S ist. Die Ebene, in der q liegt, werde hierzu mit Q bezeichnet. Die Ebene Q ist offenbar in jedem Punkte Schmiegebene an q.

Auf Grund der zweiten Definition einer Geodätischen müssen die Normalen der Fläche S, wenn q eine Geodätische sein soll, in allen Punkten der Kurve q in der Tangentialebene dieser Kurve liegen, d. h. in der Ebene Q.

Beispiel 3. Wir betrachten die Oberfläche einer Kugel. Wird die Kugeloberfläche mit einer Ebene Q geschnitten, die durch den Kugelmittelpunkt geht, so ergibt sich als Schnittlinie ein sogenannter Großkreis. Wir behaupten, daß die Großkreise der Kugeloberfläche deren geodätische Linien sind.

Beweis. Die Radien einer Kugel stellen in allen Punkten Normalen der Kugeloberfläche dar. Die Radien in den Punkten eines Großkreises liegen in der Ebene dieses Kreises. Es handelt sich also um eine ebene Flächenkurve mit der Eigenschaft, daß in allen Punkten der Kurve die Flächennormale in der zur Kurve gehörenden Ebene liegt. Wir haben aber gerade erst bewiesen, daß eine solche ebene Kurve eine Geodätische ist.

Schneiden wir die Kugel mit einer Ebene Q_1, die nicht durch den Kugelmittelpunkt verläuft, so erhalten wir auf der Kugeloberfläche einen Kleinkreis. Da die Normalen der Kugeloberfläche (d. h. die Radien der Kugel) in den Punkten eines Kleinkreises nicht in der Ebene des Kleinkreises liegen, kann ein Kleinkreis keine Geodätische der Kugeloberfläche sein.

Ein längs eines Großkreisbogens gespannter Gummifaden befindet sich im Gleichgewicht. Wird der Gummifaden jedoch entlang des Bogens eines Kleinkreises gespannt, so behält er diese Lage nicht bei, weil er sich nicht im Gleichgewicht befindet.

Der Satz von JOHANN BERNOULLI. *Die kürzeste Verbindung von zwei Punkten einer Fläche liegt auf einer geodätischen Linie.*

Der Beweis des BERNOULLIschen Satzes wurde bereits geführt. Einerseits haben wir nämlich bewiesen, daß eine Flächenkurve, auf der ein gespannter Faden im Gleichgewicht liegt, eine geodätische Linie ist. Andererseits wissen wir, daß sich ein in zwei Punkten A und B auf einer Fläche befestigter elastischer Faden nur dann im Gleichgewicht befindet, wenn er auf der kürzesten Verbindung zwischen diesen Punkten liegt. (Weitere elementare Beweise dieses Satzes findet man in Büchern über Differentialgeometrie.)

Anmerkung. Wir legen durch zwei Punkte A und B einer Kugeloberfläche einen Großkreis q. Dieser wird von den Punkten A und B in zwei Teile zerlegt (Abb. 60). Wir bezeichnen diese mit $\overset{\frown}{AMB}$ und $\overset{\frown}{ANB}$. Beide Kurvenstücke sind Geodätische, die die Punkte A und B verbinden. Ist $\overset{\frown}{AMB}$ kürzer als $\overset{\frown}{ANB}$, so stellt $\overset{\frown}{AMB}$ offenbar die kürzeste Verbindung der Punkte A und B auf der Kugeloberfläche dar, während $\overset{\frown}{ANB}$, obgleich ebenfalls Geodätische, keinesfalls eine kürzeste Verbindung zwischen den Punkten A und B auf der Kugeloberfläche herstellt. Ein auf die Kugeloberfläche gespannter Gummifaden befindet sich sowohl in der Lage $\overset{\frown}{AMB}$ als auch in der Lage $\overset{\frown}{ANB}$ im Zustand des Gleichgewichts. Während er sich in der Lage $\overset{\frown}{AMB}$ jedoch im stabilen Gleichgewicht befindet, ist sein Gleichgewicht in der Lage $\overset{\frown}{ANB}$ nur labil. Wir verschieben den Faden etwa so aus der Lage $\overset{\frown}{ANB}$, daß er zunächst die Lage der Kurve $\overset{\frown}{AN_1B}$ bekommt. Diese liegt ganz in der Nähe der Kurve $\overset{\frown}{ANB}$, ist aber kürzer. Der Faden aber bleibt keinesfalls auf $\overset{\frown}{AN_1B}$ ruhen, sondern entfernt sich von allein weiter in die Lage $\overset{\frown}{AMB}$.

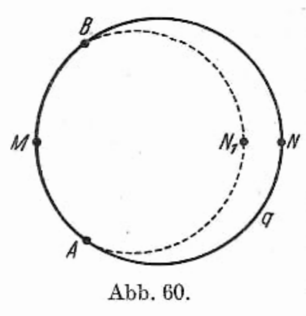


Abb. 60.

Wir haben damit erkannt, daß *die kürzeste Verbindung zweier Flächenpunkte wohl notwendig eine Geodätische ist, daß aber die Eigenschaft einer Kurve, Geodätische zu sein, nicht dafür hinreicht, daß sie die kürzeste Verbindung zweier Flächenpunkte darstellt.*

Es läßt sich demgegenüber aber beweisen, daß jeder hinreichend kleine Bogen einer Geodätischen eine kürzeste Verbindung ergibt.

Eine Geodätische könnte also auch als eine Kurve definiert werden, deren einzelne Teilbogen, sobald sie hinreichend klein sind, kürzeste Verbindungen ergeben.

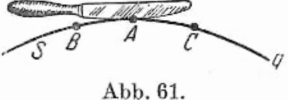


Abb. 61.

3. „Konstruktion" einer geodätischen Linie. Wir lassen die Schneide eines Messers auf einer Fläche S entlang gleiten. Die Schneide des Messers tangiert hierbei in jedem Augenblick die Fläche S in einem gewissen Punkt A (Abb. 61). Halten wir das Messer dabei so, daß die Normale der Fläche im Berührungspunkte in die Ebene des Messers fällt, so wird die von der Messerschneide auf die Fläche S gezeichnete Kurve q eine Geodätische sein. Betrachten wir z. B. einen kleinen Bogen $\overset{\frown}{BC}$ der mit dem Messer gezeichneten Kurve q und auf diesem einen Punkt A. Von dem

Bogen $\overset{\frown}{BC}$ kann annähernd angenommen werden, daß er in der Ebene des Messers liegt, wenn dieses die Fläche gerade im Punkte A berührt. Die Ebene des Messers stellt somit in dem Augenblick, in dem das Messer die Fläche im Punkte A berührt, die Schmiegebene der Kurve q im Punkte A dar. Wir wissen aber, daß eine Kurve q, bei der in jedem Punkte die Flächennormale in der Schmiegebene der Kurve liegt, eine Geodätische ist. Die Kurve q ist somit eine zu unserer Fläche gehörende Geodätische.

Für eine beliebige Fläche kann noch die folgende Aufgabe betrachtet werden: Das Abwickeln eines schmalen, aus einer Fläche ausgeschnittenen Streifens in eine Ebene sowie umgekehrt das Aufwickeln eines ebenen Streifens auf eine Fläche.

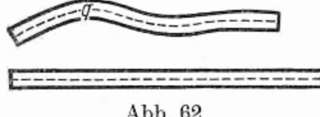


Abb. 62.

Auf einer Fläche sei eine Kurve q gegeben. Wir umgeben q mit einem schmalen Streifen (Abb. 62). Im allgemeinen wird es unmöglich sein, den Streifen in eine Ebene abzuwickeln, ohne daß die im Streifen liegenden Kurven verzerrt werden. Allerdings werden die Verzerrungen um so geringfügiger sein, je schmaler der Streifen ist.[1])

Wird ein schmaler Streifen einer Fläche in eine Ebene abgewickelt, so geht jede Kurve, die in diesem Streifen die kürzeste Verbindung zweier Punkte darstellt, in eine Kurve über, welche die entsprechende Eigenschaft in der Ebene hat, d. h. in ein Stück einer Geraden. Umgekehrt geht jedes in einer Ebene liegende Geradenstück bei der Aufwicklung der Ebene auf eine Fläche in eine Kurve über, welche die Eigenschaft hat, die kürzeste Verbindung gewisser Punkte zu sein, d. h. in ein Stück einer Geodätischen. Unser schmaler Streifen wird also so auf der Fläche liegen, daß seine Geraden zu Geodätischen werden. Er liegt daher längs einer Geodätischen, wenn der zugehörige ebene Streifen längs einer Geraden lag. Man erhält demnach den Verlauf von Geodätischen einer Fläche, indem man schmale Streifen auf die Fläche legt.

§ 9. Ergänzende Bemerkungen über geodätische Linien

1. Symmetrieebene. Wir wollen jetzt einige Beispiele für geodätische Linien untersuchen. Zunächst sei an folgende Definition erinnert: Zwei Punkte A und A' heißen *symmetrisch in bezug auf eine Ebene* Q, wenn sie so auf einer gemeinsamen Senkrechten von Q liegen, daß ihre Abstände von Q miteinander übereinstimmen (Abb. 63). Wir können nun folgende Definition aussprechen.

---

[1]) In der Sprechweise der Infinitesimalrechnung würde man sagen, daß die Änderungen der Kurvenlängen gegenüber der Streifenbreite Größen sind, die von höherer Ordnung klein werden.

Zwei Figuren q und q' heißen *symmetrisch in bezug auf eine Ebene* Q, wenn jedem Punkt A der Figur q' ein in bezug auf Q symmetrischer Punkt A' der Figur q' entspricht und umgekehrt (Abb. 64).

Eine Ebene Q wird *Symmetrieebene* einer Fläche S genannt, wenn sie S in zwei Teile zerlegt, die in bezug auf Q symmetrisch sind.

Beispiele. Hinsichtlich einer Kugeloberfläche ist jede Ebene, die durch den Kugelmittelpunkt geht, Symmetrieebene.

Im Falle eines Kreiskegels bzw. eines Kreiszylinders sind alle durch die Achsen gelegten Ebenen Symmetrieebenen.

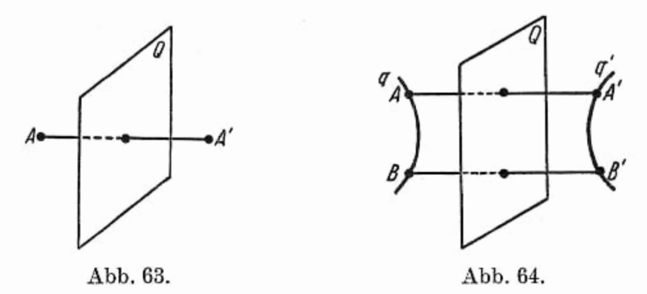


Abb. 63. Abb. 64.

Für einen endlichen Kreiszylinder ist die Ebene, die zur Zylinderachse senkrecht verläuft und die Höhe halbiert, Symmetrieebene.

Für einen unendlichen Zylinder (die Erzeugenden eines solchen Zylinders sind unendlich lange Geraden) ist jede Ebene, die senkrecht zur Achse verläuft, Symmetrieebene.

Satz. *Hat eine Fläche S eine Symmetrieebene Q, die S längs der Kurve q schneidet, so ist die Kurve q eine Geodätische der Fläche S.*[1])

Nach Voraussetzung liegt q in der Ebene Q. Eine ebene Kurve q (vgl. Beispiel 2 des vorhergehenden Paragraphen) ist dann eine Geodätische, wenn die Normale der Fläche S in jedem Punkte von q in der Ebene Q liegt.

Es sei A irgendein Punkt der Kurve q (Abb. 65). Wir wollen beweisen, daß die Normale von S im Punkte A in der Ebene Q liegt. Wir nehmen hierzu das Gegenteil an, d. h., wir nehmen an,

---

[1]) Wir erinnern nochmals daran, daß ausschließlich glatte Flächen betrachtet werden.

daß die Normale AB von S im Punkte A nicht in der Ebene Q liegt. Die zu AB symmetrische Gerade bezeichnen wir mit AB'. Da AB' nicht in Q liegt, fallen AB und AB' nicht zusammen. Die Ebene Q ist nun aber Symmetrieebene der Fläche. Ist also AB Normale von S im Punkte A, so muß dementsprechend auch die zu AB symmetrische Gerade AB' Normale von S im Punkte A sein. Die Fläche S besäße demnach im Punkte A zwei Normalen, was unmöglich ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß die Normale von S in jedem Punkte A der Kurve in der Ebene Q liegt, womit unser Satz bewiesen ist.

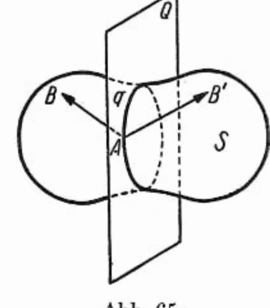


Abb. 65.

2. Geschlossene Geodätische. Wir betrachten einen Gummiring, der um eine Fläche S gespannt ist. Diesem entspreche die geschlossene Kurve q. Befindet sich der Ring im Gleichgewicht, so ist q eine *geschlossene geodätische Linie*. Beispielsweise befindet sich eine Gummischlinge auf einer Kugeloberfläche in Gleichgewicht, wenn sie die Form eines Großkreises hat. Großkreise einer Kugeloberfläche sowie Ellipsen als Meridiane eines Rotationsellipsoids sind geschlossene geodätische Linien (Über Rotationsflächen s. § 10).

Hat eine geschlossene Fläche S mehrere Symmetrieebenen, so schneidet *jede Symmetrieebene* auf Grund des oben bewiesenen Satzes die Fläche in einer geschlossenen Geodätischen.

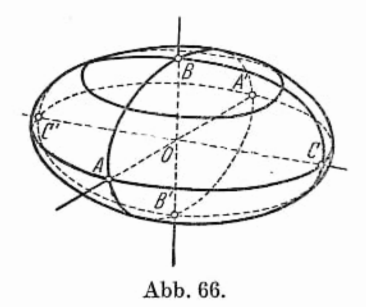


Abb. 66.

Ein Ellipsoid mit drei verschieden großen Achsen AA', BB', CC' (Abb. 66) besitzt drei Symmetrieebenen, von denen jede durch zwei Achsen des Ellipsoids verläuft. Die drei Ebenen

schneiden die Oberfläche des Ellipsoids in drei geschlossenen Geodätischen, den Ellipsen E_1, E_2 und E_3.

Man kann zeigen, daß *jede geschlossene Fläche mindestens drei geschlossene Geodätische hat.*[1])

3. Das Hertzsche Prinzip. Die Bewegung eines Punktes, der sich infolge seiner Trägheit in einer Ebene bewegt, verläuft geradlinig (erstes NEWTONsches Axiom).

Die Bewegung eines Punktes, der sich auf einer beliebigen Fläche ohne Einfluß äußerer Kräfte bewegt, verläuft auf einer geodätischen Linie dieser Fläche.

Hierin besteht das HERTZ*sche Prinzip.* So bewegt sich z. B. ein Punkt, auf den keinerlei äußere Kräfte wirken, auf einer Kugeloberfläche entlang eines Großkreises und auf einem Zylindermantel entlang einer Schraubenlinie.

Zum Beweis denken wir uns die Beschleunigung, die ein sich auf einer Kurve q bewegender Punkt erfährt, in eine tangentiale (in Richtung der Tangente an q) und eine radiale (in Richtung der Hauptnormalen von q) Komponente zerlegt. Bewegt sich der Punkt ohne jede Einwirkung äußerer Kräfte auf der Kurve q, so wirkt auf den Punkt lediglich die Reaktionskraft der Fläche, auf der die Kurve q liegt. Diese Reaktionskraft hat die Richtung der Flächennormalen. Da ihre Richtung mit der Richtung der Beschleunigung zusammenfällt, muß die Beschleunigung des Punktes stets die Richtung der Flächennormalen haben. Die Flächennormale steht aber in jedem Punkte der Kurve q senkrecht auf der Kurventangente. Da nun die Beschleunigung die Richtung der Flächennormalen hat, d. h. senkrecht auf der Tangente von q steht, ist die tangentiale Beschleunigungskomponente gleich Null. Unser Punkt erfährt somit nur eine radiale Beschleunigung, die die Richtung der Hauptnormalen von q hat. Die Beschleunigung hat dann gleichzeitig die Richtung der Hauptnormalen von q und die Richtung der Normalen der Fläche S. Hieraus folgt aber, daß q eine Geodätische der Fläche S ist.

4. Geodätische Linien auf einer geknickten Fläche. Wir betrachten eine Fläche S, die aus zwei glatten Flächen S_1 und S_2, die in

---

[1]) Einen Beweis dieses keinesfalls elementaren Satzes findet man in der Arbeit Л. А. Люстерник и Л. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей (L. A. LUSTERNIK und L. SCHNIRELMAN, Topologische Methoden in der Variationsrechnung und ihre Anwendungen in der Differentialgeometrie der Flächen (1947)).

den Punkten einer Kurve s aneinanderstoßen, zusammengesetzt ist. Wir sagen, die Fläche S sei längs der Kurve s *eingeknickt*. (Das einfachste Beispiel einer solchen Fläche ist ein Zweiflach, s. § 1,1). Auf der Fläche S seien zwei Punkte A und B gegeben, die entsprechend auf S_1 und S_2 liegen (Abb. 67). $ACB = q_0$ sei die Gleichgewichtslage eines auf der Fläche S gespannten elastischen Fadens. Der Punkt C liege auf dem Knick s, während die Bogen AC und CB der Kurve q_0 Kurven auf S_1 bzw. S_2 seien. Offenbar ist AC auf S_1 und CB auf S_2 Geodätische. Mit Hilfe der von uns bereits in § 8 benutzten Methode wollen wir nun die Gleichgewichtsbedingung des Knickpunktes C ermitteln. Die

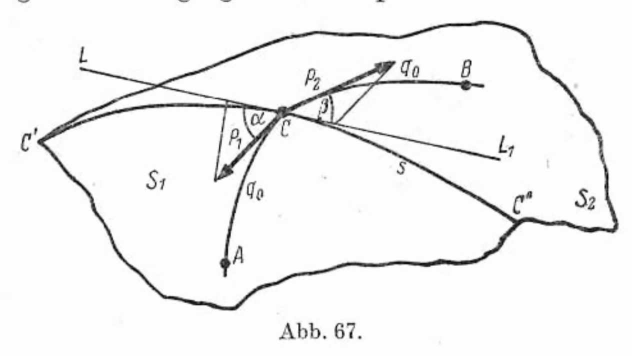


Abb. 67.

Kurve q_0 entspricht der Gleichgewichtslage eines in den Punkten A und B befestigten elastischen Fadens.

Der Winkel, den das Kurvenstück AC mit dem Teil CC' des Knicks s bildet, werde mit α bezeichnet, während β den vom Kurvenstück CB und dem Teil CC' des Knicks s gebildeten Winkel bezeichne. Im Punkt C wirken die Spannkraft P_1 in Richtung der an CA gelegten Tangente und die Spannkraft P_2 in Richtung der an CB gelegten Tangente. Jede dieser Kräfte sei gleich T. Die Projektionen der Kräfte P_1 und P_2 auf die im Punkte C an s gelegte Tangente LL_1 sind entsprechend gleich $T \cdot \cos\alpha$ und $T \cdot \cos\beta$. Sie sind entgegengesetzt gerichtet. Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$T \cdot \cos\alpha = T \cdot \cos\beta$$

ergibt sich

$$\alpha = \beta. \tag{1}$$

Die von AC und CB mit der Kante s gebildeten Winkel stimmen also miteinander überein.

Die Linie q_0 wird man natürlich *Geodätische* der Fläche S nennen.

Besteht eine Fläche S aus mehreren glatten Teilstücken, die an den Kurven

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

zusammenstoßen, so ist für jeden auf einer der Knickkurven

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

liegenden Eckpunkt einer Geodätischen die Bedingung (1) erfüllt.

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Fläche S ist eine Geodätische. Die in § 1 gefundene Eigenschaft der kürzesten Verbindungskurven auf Polyederflächen erscheint nun als Sonderfall der entsprechenden Eigenschaft geodätischer Linien (und kürzester Verbindungskurven) auf allgemeinen geknickten Flächen.

Die oben betrachtete Eigenschaft geodätischer Linien auf geknickten Flächen ließe sich auch mit Hilfe des HERTZschen Prinzips begründen.

§ 10. Geodätische Linien auf Rotationsflächen

1. Rotationsfläche. Wir lassen eine ebene Kurve q um eine Gerade AB, die mit q in einer Ebene liegt, rotieren (Abb. 68). Hierbei beschreibt die Kurve q eine bestimmte Fläche S, die *Rotationsfläche* genannt wird. Jede Ebene Q, welche die Rotationsachse AB enthält, schneidet S in zwei Kurven q und q', den sogenannten *Meridianen* der Rotationsfläche. Die Kurve q gibt in jedem Augenblick während der Rotation um die Achse den Verlauf eines solchen Meridians an. Jede senkrecht durch die Rotationsachse gelegte Ebene schneidet S in einem Kreis, der *Parallel-* oder *Breitenkreis* genannt wird.

Satz 1. *Sämtliche Meridiane einer Rotationsfläche sind Geodätische.*

Zum Beweis betrachten wir zwei Meridiane q und q'. Diese ergeben sich als Schnittkurven, wenn die Rotationsfläche so mit einer Ebene Q geschnitten wird, daß die Rotationsachse AB in Q liegt. Da die Ebene Q Symmetrieebene der Rotationsfläche S ist, schneidet sie die Fläche S in geodätischen Linien, d. h., q und q' sind tatsächlich geodätische Linien.

Beispiel. Wir lassen eine Ellipse E um eine ihrer Achsen rotieren (Abb. 69). Die Meridiane des dabei erzeugten Rotationsellipsoids sind Ellipsen, die mit E übereinstimmen und die Geodätischen des Rotationsellipsoids darstellen.

Anmerkung. Auf einem Zylindermantel sind alle Parallelkreise Geodätische, während auf einer Kugeloberfläche von allen Parallelkreisen lediglich der Großkreis (Äquator) eine Geodätische ist; auf einem Kugelmantel schließlich ist kein Parallelkreis eine Geodätische.

2. Der Satz von Clairaut. Wir betrachten eine Geodätische q einer beliebigen Rotationsfläche S und einen auf q liegenden Punkt A. Ferner sei r der Abstand des Punktes A von der Rotationsachse (der Radius des Parallelkreises) und α der Winkel, den

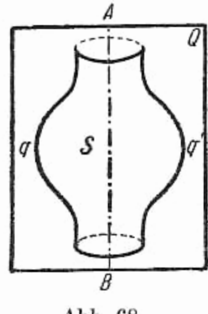


Abb. 68.

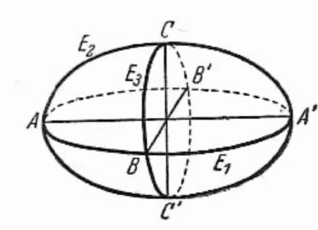


Abb. 69.

die Geodätische q mit dem durch den Punkt A verlaufenden Meridian bildet.

Satz 2 (Clairaut). Für alle Punkte einer Geodätischen q ist das Produkt $r \sin \alpha$ eine konstante Größe,

$$r \cdot \sin \alpha = c = \text{const.} \qquad (1)$$

Bezeichnen wir mit β den Winkel, den die Geodätische mit dem Parallelkreis bildet, so bekommt die Gleichung (1) die Form

$$r \cdot \cos \beta = \text{const.}$$

Für den Spezialfall eines Kegel- bzw. Zylindermantels wurde der Satz von Clairaut bereits in § 3, 4 bewiesen.

Betrachten wir nun eine Fläche S_n, die durch Rotation eines Streckenzuges $A_0, A_1, \ldots, A_n$ um die Achse L entstanden sei. S_n besteht dann aus n durch Rotation der einzelnen Strecken A_0A_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ entstandenen Flächen $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Diese Flächen werden von den Parallelkreisen $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, die durch Rotation der Ecken $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ des Streckenzuges erzeugt werden, voneinander getrennt.

Wir betrachten eine Geodätische q_0, die zwei Punkte A und B der Fläche S_n verbindet. Die Geodätische q_0 besteht somit aus einzelnen geodätischen Kurven, die auf den Kegelstumpf- oder Zylindermänteln

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

liegen. Letztere stoßen auf den Parallelkreisen

$$t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$$

aneinander. Wie in § 9, 4 bewiesen wurde, sind die Winkel, die von je zwei benachbarten geodätischen Linien mit dem Knick gebildet werden, einander gleich. Der Winkel β, den die Kurve q_0 mit dem Parallelkreis bildet, ändert sich bei der Bewegung längs q_0 stetig, also nicht sprunghaft (ein Sprung könnte dann auftreten, wenn der Parallelkreis auf einen Knick trifft; wie oben gesagt wurde, tritt dieser Fall hier nicht ein). Aus diesem Grunde ändern sich auch die Größen $r \cos \beta$ stetig, also nicht sprunghaft.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich der Ausdruck $r \cdot \cos \beta$ bei der Bewegung auf q_0 verhält. Solange wir auf einer der Flächen

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

bleiben, bleibt der Wert des Ausdruckes $r \cdot \cos \beta$ konstant (auf Grund des schon bewiesenen Spezialfalles des Satzes von Clairaut). Nun bleibt aber $r \cdot \cos \beta$ auch konstant, wenn eine der Knickkurven

$$t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$$

überquert wird. Dies bedeutet aber, daß der Ausdruck für alle Punkte der Kurve q_0 konstant ist. Somit gilt überall die Beziehung

$$r \cdot \cos \beta = \text{const}.$$

Eine beliebige ebene Kurve m kann als Grenzkurve einbeschriebener Polygonzüge m_n betrachtet werden, wenn die Gliederzahl n unbegrenzt wächst und die Länge des größten Gliedes gegen Null strebt. Eine Fläche S, die durch Rotation der Kurve m um eine bestimmte Achse entstanden ist, ist dementsprechend die Grenzfläche der durch Rotation der m_n um dieselbe Achse erzeugten Flächen S_n. Da wir bewiesen haben, daß für alle Flächen S_n der Satz von Clairaut erfüllt ist, gilt er folglich für eine beliebige Fläche S.

KAPITEL IV

POTENTIELLE ENERGIE GESPANNTER FÄDEN

§ 11. Bewegung eines Fadens, dessen Länge sich nicht ändert

1. Potentielle Energie eines Fadens. Wir betrachten einen elastischen Faden und nehmen an, daß die Spannkraft T in allen seinen Punkten gleich groß ist und unverändert bleibt, wenn sich die Länge des Fadens ändert. Wir wollen die potentielle Energie eines solchen Fadens bestimmen.

Es sei $q = \overset{\frown}{ABC}$ eine glatte Kurve der Länge l, die aus einem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ der Länge l_0 und einem Bogen $\overset{\frown}{BC}$ der Länge $(l-l_0)$ bestehe (Abb. 70). Ein Faden, der zunächst die Lage $\overset{\frown}{AB}$ inne hat, möge durch Bewegung auf der Kurve q in die Lage $\overset{\frown}{ABC}$ gebracht werden, indem der Punkt A festgehalten und der Punkt B auf der Kurve BC mit der Länge $(l-l_0)$ verschoben wird. Gesucht ist die von den Spannkräften geleistete Arbeit.

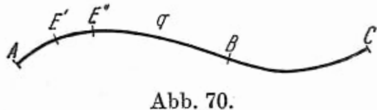


Abb. 70.

Die von den im Punkte B angreifenden Spannkräften geleistete Arbeit ist offenbar gleich $T(l-l_0)$.

Die Arbeit der auf ein kleines Stück $E'E''$ der Kurve q wirkenden Spannkräfte ist gleich Null, weil die Resultierende dieser Kräfte die Richtung der Normalen von q hat, während sich das Stück $E'E''$ auf der Kurve q selbst bewegt.

Die bei der Bewegung des Fadens insgesamt geleistete Arbeit ist also gleich der Arbeit, die von der auf den Endpunkt B wirkenden Kraft geleistet wird, d. h. gleich

$$T(l-l_0) = T\,l - T\,l_0.$$

Die potentielle Energie des Fadens in der Lage $\overset{\frown}{AB}$ sei gleich V_0 und in der Lage $\overset{\frown}{ABC}$ gleich V. Da der Zuwachs $V - V_0$ der

potentiellen Energie gleich der aufgewendeten Arbeit ist, gilt

$$V - V_0 = T\,l - T\,l_0$$

oder

$$V - T\,l = V_0 - T\,l_0. \tag{1}$$

Wir nehmen an, daß die potentielle Energie gegen Null strebt, wenn die Länge des Fadens gegen Null strebt; aus $l_0 \to 0$ soll also $V_0 \to 0$ folgen. Dann gilt auch $(V_0 - T\,l_0) \to 0$. Gehen wir auf der rechten Seite der Gleichung (1) zur Grenze für $l_0 \to 0$ über, so erhalten wir

$$V - T\,l = 0$$

oder

$$V = T\,l. \tag{2}$$

Die potentielle Energie eines elastischen Fadens ist gleich dem Produkt aus seiner Länge und der Spannkraft.

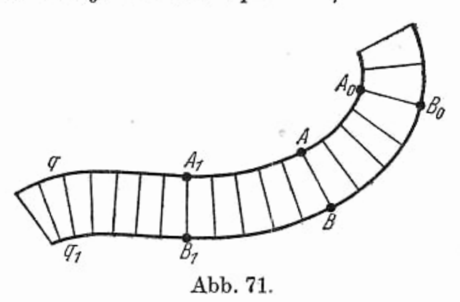


Abb. 71.

Folgerung. Ist die bei der Bewegung eines Fadens von den Spannkräften verrichtete Arbeit gleich Null, so hat sich die Länge des Fadens nicht verändert. In diesem Falle bleibt auch die potentielle Energie des Fadens, die seiner Länge proportional ist, unverändert.

Wird ein geradliniges Stück AB eines elastischen Fadens so verschoben, daß die Geradlinigkeit erhalten bleibt, so reduziert sich die insgesamt von den Spannkräften verrichtete Arbeit auf die Arbeit, die von den Spannkräften in den Endpunkten verrichtet wird.

Die Arbeit eines Fadens, der die Form eines Streckenzuges ACB beibehält, ist gleich der Arbeit, die von den Spannkräften in den Endpunkten A, B und im Eckpunkt C geleistet wird.

2. *Parallele Kurven.* Zwei Kurven heißen *parallel*, wenn sie in jedem Punkt eine gemeinsame Normale besitzen. Einfachste

Beispiele von parallelen Kurven sind parallele Geraden und konzentrische Kreise.

Satz 1. *Alle zwischen zwei parallelen Kurven q und q_1 liegenden Normalenabschnitte haben die gleiche Länge.*

Die gemeinsame Normale AB von q und q_1 werde so aus der Lage A_0B_0 in die Lage A_1B_1 bewegt, daß sie dabei ständig gemeinsame Normale der beiden Kurven bleibt (Abb. 71).

Die hierbei von den Spannkräften verrichtete Arbeit ist gleich Null, da die im Endpunkte A angreifende Spannkraft die Richtung der Normalen von q und die im Endpunkte B wirkende Spannkraft die Richtung der Normalen von q_1 hat. Hieraus folgt aber, daß die Länge l der gemeinsamen Normalen konstant geblieben ist,

$$l(A_0B_0) = l(A_1B_1).$$

3. Die Normalen einer Ellipse und einer Parabel. Wir beginnen mit folgender Definition: *Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte B, deren Abstände von zwei festen Punkten F und F_1 immer die gleiche Summe bilden,*

$$FB + F_1B = 2a \qquad (3)$$

($a =$ const).

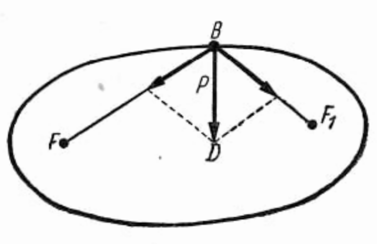


Abb. 72.

Die Punkte F und F_1 werden *Brennpunkte*, die Strecken FB und F_1B *Fahrstrahlen oder Radiusvektoren* der Ellipse genannt.

Satz 2. *Die Normale einer Ellipse ist in jedem Punkte B gleich der Halbierenden BD des von den Radiusvektoren gebildeten Winkels FBF_1* (Abb. 72).

Beweis. Ein gespannter Faden, der die Form des Streckenzuges FBF_1 hat, sei in den Punkten F und F_1 befestigt. Bewegt sich der Punkt B des Fadens auf der Ellipse, so bleibt dessen Länge nach Formel (3) konstant. Dies bedeutet aber, daß die von den Spannkräften verrichtete Arbeit ständig gleich Null ist. Nun reduziert sich aber die Gesamtarbeit der Spannkräfte auf die Arbeit der im Punkt B angreifenden Spannkräfte. In diesem Punkte greifen zwei gleich große Spannkräfte an, die die Richtungen BF und BF_1 haben. Ihre Resultierende P zeigt in die Richtung der Halbierenden BD des Winkels FBF_1. Da die Arbeit von P bei der Verschiebung von B auf der Ellipse, wie wir eben sahen, ständig gleich Null ist, muß P die Richtung der Normalen zur Ellipse haben. Damit ist bewiesen, daß in jedem Punkte B die

Normale der Ellipse mit der Halbierenden des Winkels FBF_1 zusammenfällt.

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte B, die von einem festen Punkte F und einer festen Geraden d jeweils den gleichen Abstand haben,

$$FB = BC, \tag{4}$$

wobei BC die vom Punkt B auf die Gerade d gefälllte Senkrechte bezeichnet (Abb. 73). Der Punkt F heißt *Brennpunkt* der Parabel, die Gerade d ihre *Leitlinie*. Die zu d senkrechte Gerade LL, die durch den Brennpunkt verläuft, ist die *Achse* der Parabel.

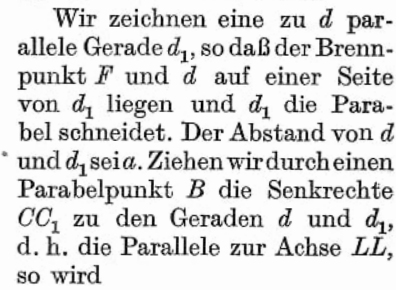


Abb. 73.

Wir zeichnen eine zu d parallele Gerade d_1, so daß der Brennpunkt F und d auf einer Seite von d_1 liegen und d_1 die Parabel schneidet. Der Abstand von d und d_1 sei a. Ziehen wir durch einen Parabelpunkt B die Senkrechte CC_1 zu den Geraden d und d_1, d. h. die Parallele zur Achse LL, so wird

$$CC_1 = CB + BC_1 = a,$$

wobei $a = \text{const}$ der Abstand der Parallelen d und d_1 ist. Aus Gleichung (4) folgt

$$FB + BC_1 = a. \tag{5}$$

Nun gelingt leicht der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 3. *Die Normale ist in jedem Punkte B der Parabel die Halbierende des vom Radiusvektor FB und von der zur Achse LL parallelen Geraden BC_1 gebildeten Winkels FBC_1.*

Beweis. Wir betrachten einen im Punkt F befestigten Faden, der die Form des Streckenzuges FBC_1 hat, wobei der andere Endpunkt C_1 auf der Geraden d_1 bewegt wird und der Punkt B des Fadens so auf der Parabel liegt, daß BC_1 zu d_1 in jeder Lage senkrecht bleibt.

Da die Länge des Fadens dabei nach Gleichung (5) unverändert bleibt, ist die Arbeit der Spannkräfte gleich Null. Diese setzt sich aus der Arbeit der in den Punkten C_1 und B angreifenden Spannkräfte zusammen. Die im Punkte C_1 verrichtete Arbeit der Spannkräfte ist gleich Null, da die Spannkräfte in C_1 die Richtung der zu d_1 senkrechten Geraden C_1B haben. Dies bedeutet aber,

daß auch im Punkte B die Arbeit der Spannkräfte gleich Null ist. Mit den gleichen Überlegungen, wie wir sie schon für den Fall der Ellipse durchführten, gelangen wir schließlich zum Beweis unseres Satzes[1]).

Anmerkung. Aus Satz 3 folgt ein einfaches Verfahren zur Konstruktion der Normalen in einem Parabelpunkt. Man braucht auf der Achse LL nur eine Strecke FD abzutragen, die genauso lang ist wie der Radiusvektor FB der Parabel. Dann ist die Gerade BD die gesuchte Normale der Parabel im Punkte B.

Um dies einzusehen, schließen wir folgendermaßen.

In Abb. 73 sind die Winkel $\sphericalangle 1$ und $\sphericalangle 3$ als innere Wechselwinkel an den von der Geraden BD geschnittenen Parallelen LL und CC_1 einander gleich. Da die Winkel $\sphericalangle 3$ und $\sphericalangle 2$ als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck FBD miteinander übereinstimmen, folgt $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 1$. Die Gerade BD ist demzufolge die Halbierende des Winkels FBC und damit nach Satz 3 die Normale der Parabel im Punkte B.

4. Geodätische Tangenten und Normalen. Ändert sich die Lage eines geodätischen Kurvenbogens $\overset{\frown}{AB}$ auf einer Fläche, so verrichten lediglich die an den Endpunkten A und B des Bogens angreifenden Spannkräfte eine Arbeit. Die Resultierende der auf ein beliebiges inneres Teilstück von AB wirkenden Kräfte hat nämlich die Richtung der Flächennormalen. Dies bedeutet aber, daß die von ihnen geleistete Arbeit gleich Null ist.

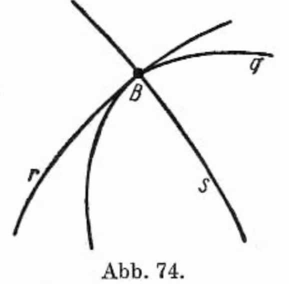


Abb. 74.

Unter einer *geodätischen Tangente* einer Flächenkurve q in einem Punkte B versteht man eine Geodätische r, die im Punkte B mit q eine gemeinsame Tangente besitzt. Entsprechend versteht man unter einer *geodätischen Normale* einer Kurve q in einem Punkte B eine Geodätische s, die im Punkte B orthogonal zur Kurve q verläuft (Abb. 74).

Der Satz 1 über gemeinsame Normalen von parallelen Kurven läßt sich auch auf geodätische Normalen verallgemeinern, und zwar folgendermaßen:

---

[1]) Zunächst ist der Satz hiermit nur für alle links der Geraden d_1 gelegenen Parabelpunkte bewiesen. Da die Lage der zu d parallelen Geraden aber völlig beliebig ist, gilt der Satz tatsächlich für alle Punkte der Parabel.

Satz 4. *Haben auf einer Fläche zwei Kurven q und q_1 alle geodätischen Normalen gemeinsam, so haben alle zwischen q und q_1 liegenden Normalabschnitte dieselbe Länge* (Abb. 75).

Beispiel. Auf einer Kugeloberfläche haben alle Meridiane zwischen zwei Parallelkreisen gleiche Länge.

Der Beweis des Satzes 4 verläuft genauso wie der des Satzes 1.

5. Geodätische Kreise. Wir tragen von einem Punkte A aus alle möglichen geodätischen Kurvenstücke $\overset{\frown}{AB}$ gleicher Länge ab. Der geometrische Ort q aller Endpunkte B heißt *geodätischer Kreis*. Die geodätischen Kurvenstücke $\overset{\frown}{AB}$ werden *geodätische Radien* genannt (Abb. 76).

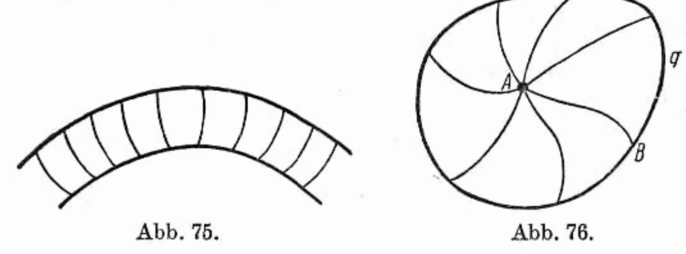


Abb. 75. Abb. 76.

Jeder geodätische Radius $\overset{\frown}{AB}$ ist geodätische Normale des geodätischen Kreises im Punkte B.

Beweis. Wir betrachten einen im Punkt A befestigten elastischen Faden, der ständig die Form eines geodätischen Radius hat. Der Faden werde nun so verschoben, daß sein anderer Endpunkt B einen geodätischen Kreis q beschreibt. Da sich hierbei die Länge des geodätischen Kurvenstücks AB nicht ändert, ist die Gesamtarbeit der Spannkräfte gleich Null. Diese stimmt aber mit der Arbeit der im Punkte B angreifenden Spannkräfte überein, was bedeutet, daß die Arbeit der Spannkräfte, die in Richtung der Normalen von q wirken, gleich Null ist. Da aber die Richtung der Spannkräfte mit der Richtung der im Punkte B an den Radius $\overset{\frown}{AB}$ gelegten Tangente übereinstimmt, ist unser Satz bewiesen.

§ 12. Evoluten und Evolventen

Wir betrachten eine ebene Kurve q, die Gesamtheit der Normalen von q und die Einhüllende s dieser Normalen (d. h. die Kurve s, die in jedem Punkt eine Normale berührt). Die Ein-

hüllende s heißt *Evolute* der Kurve q, während die Kurve q selbst, die alle an die Evolute s gelegten Tangenten orthogonal schneidet, *Evolvente* der Kurve s genannt wird (Abb. 77).

Jeder Punkt B der Evolute kann als Schnittpunkt von zwei unendlich nahe beieinander liegenden Normalen AB und $A'B'$ der Evolvente aufgefaßt werden, d. h., der Punkt B ist der zum Punkt A gehörende Krümmungsmittelpunkt der Kurve q (vgl. § 6). Die Evolute s einer Kurve q kann somit auch als der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte der Kurve q definiert werden.

Wir betrachten nun einen elastischen Faden. Seine Gestalt werde durch die Kurve r wiedergegeben, die aus dem Abschnitt AB der Evolventennormale und dem Stück $\overset{\frown}{BD}$ der Evolute s besteht (Abb. 77). Bewegt man sich auf r von A nach D, so hat man im Punkte B einen glatten Übergang von der Strecke AB zum Kurvenstück BD. Daher befindet sich der Gummifaden in der Lage $r = \overset{\frown}{ABD}$ im Gleichgewichtszustand. Bewegt man den Punkt A des Fadens r auf der Evolvente und den Punkt B entsprechend auf der Evolute, so behält AB seine Lage als Normale zur Evolvente bei,

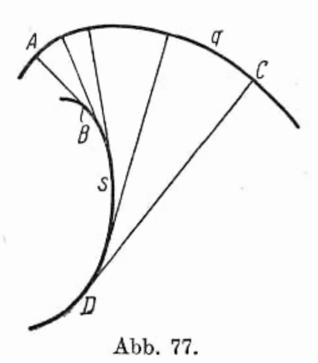


Abb. 77.

während der übrige Teil des Fadens $\overset{\frown}{BD}$ mit der Evolute zusammenfällt. Die Arbeit der auf die Normale AB wirkenden Spannkräfte ist gleich der Arbeit der in den Punkten A und B angreifenden Spannkräfte. Im Punkte A wird keine Arbeit geleistet, weil die Spannkräfte hier die Richtung der Normalen von q haben, auf der sich der Punkt A bewegt. Die Arbeit der im Punkte B wirkenden Spannkräfte ist ebenfalls gleich Null, weil sich die Spannkräfte in jedem Augenblick gegenseitig aufheben. Da schließlich auch in dem an der Bewegung gerade nicht beteiligten Teil $\overset{\frown}{BD}$ des Fadens keine Arbeit aufgewendet wird, ist die Gesamtarbeit der Spannkräfte in jedem Augenblick gleich Null. Während der Bewegung bleibt folglich die potentielle Energie des Fadens r unverändert, was bedeutet, daß auch die Länge des Fadens r unverändert bleibt.

Ist $\overset{\frown}{ABD}$ die Anfangslage des Fadens r und CD die Endlage, so gilt folglich

$$l\,(\overset{\frown}{ABD}) = l\,(CD).$$

Da nun

$$l\,(\overset{\frown}{ABD}) = l\,(AB) + l\,(\overset{\frown}{BD})$$

oder

$$l\,(CD) = l\,(AB) + l\,(\overset{\frown}{BD})$$

ist, wird

$$l\,(\overset{\frown}{BD}) = l\,(DC) - l\,(AB).$$

Wir haben hiermit folgenden Satz bewiesen.

Satz. *Legt man durch zwei Punkte A und C einer Evolvente die Normalen bis zu den Berührungspunkten B und D mit der Evolute, so ist die Differenz der Längen dieser Normalenabschnitte gleich der Länge des von ihnen auf der Evolute abgetrennten Kurvenstückes $\overset{\frown}{BD}$.*



Abb. 78.

Betrachtet man zu einer Flächenkurve q die Gesamtheit der geodätischen Normalen (Abb. 78), so wird man deren Einhüllende s als *geodätische Evolute* der Kurve q und die Kurve q selbst als *geodätische Evolvente* der Kurve s bezeichnen. Der obige Satz behält seine Gültigkeit, wenn die Begriffe „Normale", „Evolute" und „Evolvente" durch die Begriffe „geodätische Normale", „geodätische Evolute" und „geodätische Evolvente" ersetzt werden. Der Leser möge sich selbst davon überzeugen, daß der Beweis in diesem Falle genauso verläuft.

§ 13. Gleichgewicht eines Systems elastischer Fäden

1. Das Dirichlet*sche Prinzip.* Dieses Prinzip läßt sich folgendermaßen formulieren. *Ein mechanisches System befindet sich in der Gleichgewichtslage, wenn seine potentielle Energie ein Minimum hat.*

Beweis. Verschiebt man ein ruhendes mechanisches System aus einer Lage S, in der seine potentielle Energie ein Minimum hat, so kann seine potentielle Energie nur zunehmen, was nach dem Energieerhaltungssatz bedeutet, daß seine kinetische Energie

nur abnehmen kann. Befindet sich das System in der Lage S in Ruhe, d. h., hat seine kinetische Energie den Wert Null, so kann es demzufolge keine positive kinetische Energie abgeben, sich also nicht von allein bewegen.

Beispiel. Die potentielle Energie eines elastischen Fadens ist seiner Länge proportional. Die Lage, in der der Faden am kürzesten ist, ist also seine Gleichgewichtslage; eine Tatsache, die bereits mehrfach benutzt wurde.

In den folgenden zwei Aufgaben soll die Gleichgewichtslage eines aus mehreren Fäden bestehenden Systems ermittelt werden,

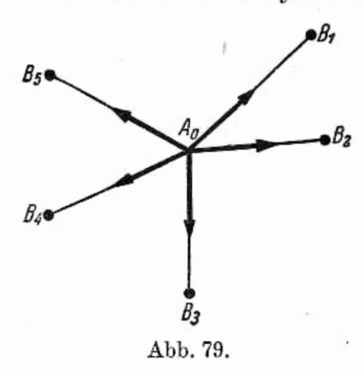


Abb. 79.

wobei besonders die zweite dieser Aufgaben für das Folgende von Bedeutung ist.

2. Minimum einer Summe von Längen. Auf einer Ebene seien n Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ gegeben. Gesucht ist der Punkt A, dessen Entfernungen nach den gegebenen Punkten die kleinste Summe bilden. Wir betrachten n elastische Fäden $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ mit dem gemeinsamen Endpunkt A. Die übrigen Endpunkte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ werden festgehalten. Die potentielle Energie dieses Fadensystems ist der Summe der Fadenlängen $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ proportional. Einem Minimum der Summe der Fadenlängen, d. h. einem Minimum der potentiellen Energie, entspricht eine Gleichgewichtslage des Systems. In dieser Lage wird jeder Faden zu einer geraden Strecke und die Summe der Längen dieser Strecken am kleinsten. Es sei A_0 die Gleichgewichtslage des Punktes A (Abb. 79). Auf A_0 wirken n gleich große Spannkräfte, welche die Richtungen $A_0B_1, A_0B_2, \ldots$ bzw. A_0B_n haben und sich gegenseitig ausgleichen. Im Punkte A_0, in dem

die Summe der Entfernungen zu den Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_n$ am kleinsten ist, hat die Resultierende der n gleich großen Kräfte somit den Wert Null[1]).

Die Bestimmung des Punktes A_0 kann mechanisch folgendermaßen erreicht werden: Eine waagerechte Platte sei in n Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_n$ durchbohrt (Abb. 80). Man verknüpft n Schnüre oberhalb der Platte in einem Punkt und zieht diese Schnüre durch die Öffnungen der Platte hindurch. Sämtliche Schnüre werden mit gleichen Gewichten belastet. Das System der mit den Gewichten belasteten Schnüre nimmt dann die gesuchte Gleichge-

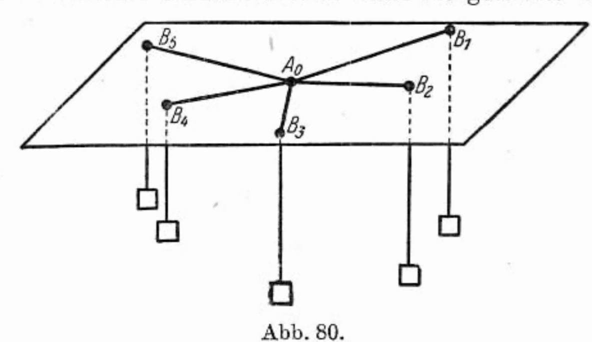


Abb. 80.

wichtslage ein, und der gemeinsame Punkt der Schnüre in der Gleichgewichtslage wird zum gesuchten Punkt A_0. Auf den Punkt A_0 wirken nämlich n gleich große Kräfte in Richtung der Öffnungen $B_1, B_2, \ldots, B_n$, von denen jede gleich dem an die entsprechende Schnur gehängten Gewicht ist. Die n gleichen Kräfte heben sich gegenseitig auf.

Zu unserer Aufgabe könnte man auch folgendermaßen gelangen: Gegeben seien n Orte $B_1, B_2, \ldots, B_n$; es soll an einer Stelle A ein Speicher gebaut werden, zu dem n Straßen $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ hinführen, und zwar soll der Speicherort möglichst zweck-

[1]) M. J. Wygodski zeigte, daß dieser Satz etwas genauer formuliert werden muß. Er gilt nur solange, wie der Punkt A, für den die Summe der Entfernungen $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ am kleinsten ist, nicht mit einem der Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zusammenfällt.

Für den Fall dreier Punkte B_1, B_2, B_3 liegt A beispielsweise im Innern des Dreiecks $B_1B_2B_3$, wenn keiner der Innenwinkel des Dreiecks größer als 120° ist. Ist einer der Winkel, z. B. der bei B_1, aber größer oder gleich 120°, so fällt der Punkt A mit diesem Punkt zusammen.

mäßig gewählt werden, d. h., die Summe der Straßenlängen $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ soll möglichst klein sein.

Diese Aufgabe wird manchmal noch etwas komplizierter formuliert, indem gefordert wird, daß die Ladungsmengen, die vom Speicher A in die Orte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ transportiert werden sollen, gewissen Werten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ proportional sind. Dann soll die Lage des Punktes A so bestimmt werden, daß die Summe

$$S = q_1 \cdot AB_1 + q_2 \cdot AB_2 + \cdots + q_n \cdot AB_n$$

zu einem Minimum wird, d. h., die Anzahl der Tonnen-Kilometer beim Transport der Ladung auf den Straßen $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ soll möglichst klein werden.

Die Lösung verläuft genauso wie bei der vorhergehenden Aufgabe, die lediglich den Spezialfall dieser Aufgabe für $q_1 = q_2 = \cdots = q_n$ darstellt. Man ermittelt wieder die Gleichgewichtslage eines Systems von n Fäden $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$, die in den Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_n$ befestigt sind und den gemeinsamen Punkt A haben.

Die Fäden $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ müssen nun aber verschiedene Spannkräfte haben, und zwar müssen diese den Größen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ proportional sein, dementsprechend die Werte $q_1 T, q_2 T, \ldots, q_n T$ annehmen. Die potentielle Energie der Fäden $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ ist entsprechend gleich $q_1 T \cdot AB_1,\ q_2 T \cdot AB_2, \ldots, q_n T \cdot AB_n$. Die gesamte potentielle Energie des Systems ist folglich

$$V = T\,(q_1 AB_1 + q_2 AB_2 + \cdots + q_n AB_n) = T\,S. \qquad (1)$$

Die Lage, in der V und damit auch die Summe S am kleinsten ist, ist die Gleichgewichtslage des Systems. Die Kurven AB_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, werden dabei zu geraden Strecken, während sich der gemeinsame Punkt $A = A_0$ der Fäden, auf den die n den Größen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ proportionalen Kräften wirken, die die Richtungen der Strecken $A_0B_1, A_0B_2, \ldots, A_0B_n$ haben, nunmehr im Gleichgewicht befindet.

Das oben beschriebene mechanische Verfahren zur Bestimmung des Punktes A_0 ist also auch hier anwendbar. Nur müssen die Gewichte, mit denen man die durch die Öffnungen in den Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_n$ gezogenen Schnüre belastet, den Werten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ proportional sein.

3. Das Gleichgewicht eines aus zwei Fäden bestehenden Systems. Wir betrachten einen aus zwei Teilen $\overset{\frown}{AC}$ und $\overset{\frown}{CB}$ bestehenden

Faden $q = \overset{\frown}{ACB}$ (Abb. 81). Die Punkte A und B sollen festgehalten werden, während der Punkt C auf einer bestimmten Kurve s beweglich sein soll. Ist die Spannung im Fadenteil $\overset{\frown}{AC}$ gleich T_1 und in $\overset{\frown}{CB}$ gleich T_2, so gilt für die potentielle Energie $V(q)$ des Fadens

$$V(q) = V(\overset{\frown}{AC}) + V(\overset{\frown}{CB}).$$

Wegen

$$V(\overset{\frown}{AC}) = T_1\, l\,(\overset{\frown}{AC})$$

und

$$V(\overset{\frown}{CB}) = T_2\, l\,(\overset{\frown}{CB})$$

ist

$$V(q) = T_1\, l\,(\overset{\frown}{AC}) + T_2\, l\,(\overset{\frown}{CB}). \tag{2}$$

Nehmen wir an, daß die potentielle Energie des Fadens q in der Lage q_0 am kleinsten ist, so ist q_0 nach dem DIRICHLETschen Prinzip

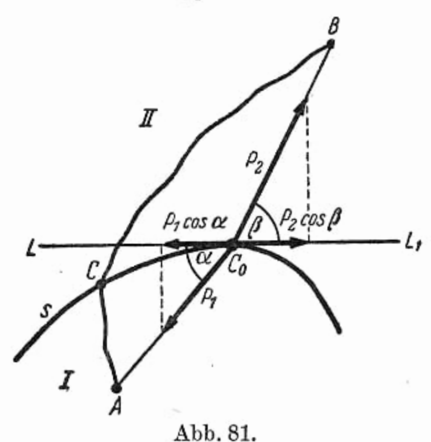


Abb. 81.

Gleichgewichtslage des Fadens. Der Schnittpunkt der Kurven q_0 und s werde mit C_0 bezeichnet.

Die Teile AC_0 und C_0B der Kurve q_0 sind offenbar geradlinige Strecken. Zu bestimmen bleiben die Gleichgewichtsbedingungen des Punktes C_0.

Auf C_0 wirken die Spannkraft $P_1 = T_1$ in Richtung C_0A und die Spannkraft $P_2 = T_2$ in Richtung C_0B. Wir ziehen die Tangente LL_1 an die Kurve s im Punkte C_0 und nehmen für die Winkel

die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle\, AC_0L &= \alpha \\ \sphericalangle\, L_1\, C_0B &= \beta\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die in der Richtung L wirkende Tangentialkomponente der Kraft P_1 ist gleich $P_1 \cos\alpha = T_1 \cos\alpha$ und die in Richtung L_1 wirkende Tangentialkomponente von P_2 gleich $P_2 \cos\beta = T_2 \cos\beta$. Der Punkt C_0 befindet sich im Gleichgewicht, wenn die beiden Tangentialkomponenten sich gegenseitig aufheben, d. h., wenn

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta \tag{4}$$

ist. Die Kurve q_0 ist demnach der Streckenzug AC_0B, dessen Ecke C_0 so auf der Kante s liegt, daß die Bedingung (4) erfüllt ist.

KAPITEL V

DAS ISOPERIMETRISCHE PROBLEM

§ 14. Krümmung und geodätische Krümmung

1. Krümmungen. Der reziproke Wert $\frac{1}{R}$ des Radius R eines Kreises heißt *Krümmung* des Kreises. Dieser Begriff kann mit Hilfe eines gespannten Fadens folgendermaßen mechanisch gedeutet werden.

Gegeben sei ein Stück $\overset{\frown}{AB}$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R. Wir nehmen an, daß dieses Stück von einem elastischen Faden gebildet wird, in dessen Endpunkten gleich große Spannkräfte T_1 und T_2 in tangentialer Richtung angreifen (Abb. 82).

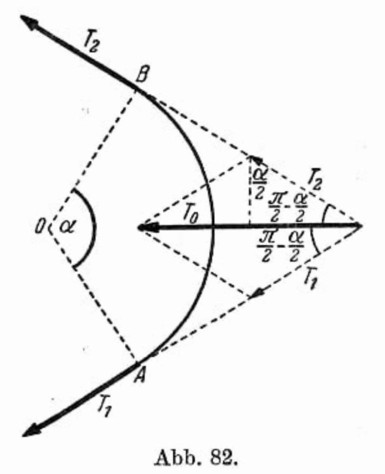


Abb. 82.

Die Resultierende T_0 der Kräfte T_1 und T_2 hat die Richtung der Halbierenden des von den Kräften T_1 und T_2 gebildeten Winkels, d. h. die Richtung des Radius, der das Stück $\overset{\frown}{AB}$ halbiert. Ist der zu AB gehörige Zentriwinkel im Bogenmaß gleich α, so ist die Länge von AB gleich $R\alpha$ und die Länge der entsprechenden Sehne gleich $2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Da ein sehr kleines Stück eines Kreises annähernd durch die zugehörige Sehne ersetzt werden kann, wird $2R\sin\frac{\alpha}{2} = R\alpha$. Für sehr kleines α gilt folglich $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, was bedeutet, daß jeder kleine Winkel (im Bogenmaß gemessen) annähernd gleich seinem Sinus ist.

A n m e r k u n g. Der Quotient aus einem Winkel und dessen Sinus strebt gegen 1, wenn der Winkel gegen Null strebt. Dieser

Satz wird nahezu in jedem Lehrbuch der mathematischen Analysis oder der Trigonometrie bewiesen.

Um die weiteren Überlegungen exakt durchführen zu können, müssen wir den Begriff *äquivalenter infinitesimaler* Größen einführen.

Unter einer infinitesimalen Größe wird eine veränderliche Größe verstanden, die gegen Null strebt.

Strebt zusammen mit einer Größe α eine zweite, von dieser abhängige Größe β gegen Null (in Abb. 82 strebt z. B. die Länge der Sehne AB gegen Null, wenn die Länge des Kreisbogenstückes $\overset{\frown}{AB}$ gegen Null strebt), und ist hierbei der Quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ der infinitesimalen Größen α und β selbst eine infinitesimale Größe, so heißt β eine infinitesimale Größe höherer Ordnung im Vergleich zu α. So ist z. B. α^2 im Vergleich zu α eine Größe höherer Ordnung.

Zwei infinitesimale Größen α und γ werden äquivalent genannt, wenn ihr Quotient gegen 1 strebt, wenn also

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma}{\alpha} = 1. \tag{1}$$

So ist z. B. die Sehne in einem Kreis dem entsprechenden Kreisbogen äquivalent.

Die Differenz von zwei äquivalenten infinitesimalen Größen γ und α ist eine infinitesimale Größe höherer Ordnung im Vergleich zu γ und α. In der Tat, aus (1) folgt

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} = 0. \tag{2}$$

Der Fehler, der beim Ersetzen einer infinitesimalen Größe durch eine ihr äquivalente Größe begangen wird, ist demnach eine infinitesimale Größe höherer Ordnung. Die von einem infinitesimalen Kurvenstück und dem zugehörigen Stück der Sekante gebildete Differenz ist beispielsweise eine infinitesimale Größe höherer Ordnung. Setzen wir das Kurvenstück dem Sekantenstück gleich, so ist der dabei gemachte Fehler gegenüber den gleichgesetzten Größen eine infinitesimale Größe höherer Ordnung.

Für die Äquivalenz zweier Größen α und γ schreibt man $\alpha \approx \gamma$.

Die Beziehung $\sin\alpha \approx \alpha$ kann als Beispiel für äquivalente Größen dienen $\left(\text{diese Beziehung ist als symbolische Schreibweise für die Gleichung } \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \text{ anzusehen}\right)$.

Wir bezeichnen das Bogenmaß des Winkels AOB (Abb. 82) mit α. Der von den Kräften T_1 und T_2 gebildete Winkel ist dann gleich $\pi - \alpha$ und der von T_1 oder T_2 und der Resultierenden T_0 gebildete Winkel gleich $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Wie man der Abbildung entnimmt, ist $T_0 = 2\,T \sin\frac{\alpha}{2}$, wobei T der gemeinsame Betrag der Kräfte T_1 und T_2 ist.

Bezeichnen wir die Länge des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ mit s, so hat α das Bogenmaß $\alpha = \frac{s}{R}$. Folglich ist

$$T_0 = 2\,T \sin\frac{s}{2\,R}.$$

Für hinreichend kleines s gilt nun

$$\sin\frac{s}{2\,R} \approx \frac{s}{2\,R},$$

so daß folglich

$$T_0 = T\frac{s}{R}$$

ist.

Betrachten wir jetzt eine beliebige Kurve q. Ein hinreichend kleines Stück dieser Kurve (es habe die Länge s), das den Punkt A enthält, kann als Stück eines Kreises mit dem Radius R angesehen werden, wenn R der Krümmungsradius der Kurve im Punkte A ist. Es sei q ein elastischer Faden, in dessen Punkten die Spannkraft T wirkt. Auf die Endpunkte unseres Kurvenstückes wirken dann zwei Spannkräfte, deren Resultierende, wie gezeigt wurde, die Richtung des Krümmungsradius hat und gleich (genauer: äquivalent) $T\frac{s}{R}$ ist.

Der reziproke Wert $\frac{1}{R}$ des Krümmungsradius R heißt *Krümmung* der Kurve q im Punkte A.

Auf einen kleinen Bogen $\overset{\frown}{AB}$ wirkt in Richtung der Hauptnormalen eine Kraft, die seiner Länge s und der Krümmung $\frac{1}{R}$ proportional ist.

2. *Geodätische Krümmung.* Wir betrachten einen kleinen Bogen einer Flächenkurve q (Abb. 83). Der Bogen habe die Länge s; A sei der Mittelpunkt des Kurvenstückes. Die Krümmung der Kurve im Punkte A bezeichnen wir mit $\frac{1}{R}$, den Winkel zwischen

der Hauptnormalen AN von q im Punkte A und der Flächennormalen AN_1 mit φ. Im Punkte A des Kurvenstücks wirkt eine Kraft der Göße $T\frac{s}{R}$ in Richtung der Hauptnormalen von q. Wir zerlegen diese Kraft in zwei Komponenten: Die eine zeige in die Richtung der Flächennormalen (sie wird durch die Reaktion der Fläche aufgehoben), und die andere sei tangential an die Fläche gerichtet. Die zweite Kraft führt zu einer Verschiebung des

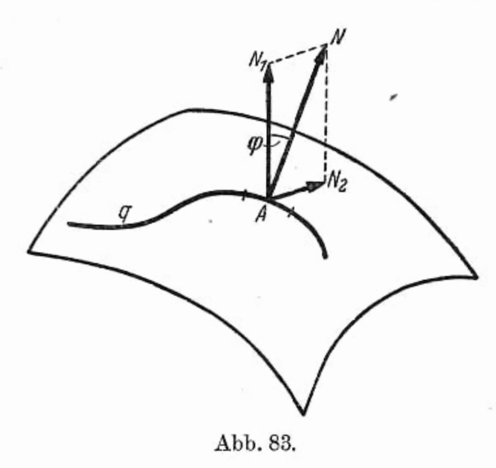


Abb. 83.

Kurvenstückes auf der Fläche. Sie ist gleich (oder richtiger, äquivalent)

$$\frac{T\,s\sin\varphi}{R} = T\,s\,\Gamma.$$

Die Größe $\Gamma = \frac{\sin\varphi}{R}$ heißt *geodätische Krümmung* der Kurve q im Punkte A. Sie bestimmt die Größe der Kraft, die im Punkte A auf das Stück eines gespannten Fadens wirkt und die Verschiebung des Kurvenstückes auf der Fläche hervorruft. Die auf das kleine Stück der Kurve wirkende Kraft ist der Länge s des Kurvenstückes und der geodätischen Krümmung Γ proportional.

Für eine geodätische Linie ist die geodätische Krümmung in allen Punkten gleich Null, weil der Winkel φ in diesem Falle gleich Null ist. Ein Faden, der entlang einer Geodätischen gespannt ist, befindet sich im Gleichgewicht.

§ 15. Das isoperimetrische Problem

1. Ausmessen eines Kreisbogenstückes. Es sei ein Kreis q mit dem Radius R und ein Stück $\overset{\smile}{AB}$ dieses Kreises gegeben. Weiter sei $\underset{\frown}{AB}$ ein Kurvenbogen, der nur wenig von $\overset{\smile}{AB}$ abweicht, d. h., der Abstand ihrer Punkte und die Differenz ihrer Krümmungen seien gering. Wir bezeichnen die Länge von $\overset{\smile}{AB}$ mit l und die Länge von $\underset{\frown}{AB}$ mit $l + \Delta l$. Führen wir das Kurvenstück $\overset{\smile}{AB}$ in das Kurvenstück $\underset{\frown}{AB}$ über, so vergrößert sich seine Länge um Δl und die potentielle Energie um $T\Delta l$. Hierbei gehen wir so vor, daß jeder Punkt C des Kurvenstücks auf der Verlängerung des Radius OC verschoben wird (Abb. 84). Ein kleines Stück CD von AB gehe dabei in das Stück $C'D'$ von AB über. Jeder Punkt des Kurvenstücks wird um die Strecke CC' verschoben, wenn wir die Verschiebung aller Punkte des Kurvenstückes als gleich betrachten, was wegen der Kleinheit von CD möglich ist. Die Fläche $CC'D'D$, die von den Strecken CC' und DD' sowie unseren Kurvenstücken begrenzt wird, können wir annähernd als Rechteck betrachten. Ist h die Länge des Kurvenstückes CD, so erhalten wir für den Flächeninhalt des Rechteckes $CC'D'D$ angenähert $h \cdot CC'$[1]):

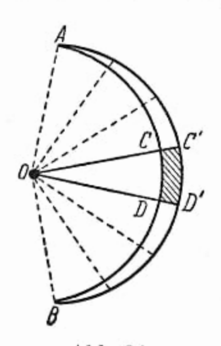


Abb. 84.

$$\text{Flächeninhalt } CC'D'D \approx h \cdot CC'. \tag{1}$$

Auf das Stück CD wirkt in Richtung des Kreismittelpunktes O eine Kraft der Größe $\frac{Th}{R}$, wobei R der Radius des Kreises ist. Die bei der Verschiebung des Kurvenstückes von CD nach $C'D'$ geleistete Arbeit ist gleich dem Produkt aus der Kraft $\frac{Th}{R}$ und dem Weg CC', d. h. gleich $\frac{Th}{R}\, CC'$ oder wegen (1) gleich

$$\frac{Th}{R}\, CC' = \frac{T}{R} \times \text{Flächeninhalt } CC'D'D. \tag{2}$$

Die für die Verschiebung des Kurvenstückes CD in die Lage $C'D'$ erforderliche Arbeit ist gleich (genauer: äquivalent) dem Pro-

[1]) Im Sinne der Äquivalenz.

dukt aus $\frac{T}{R}$ *und dem Inhalt der von dem Kurvenstück bei der Verschiebung überstrichenen Fläche* $CC'D'D$.

Wir bezeichnen die von den Kurvenstücken $\overset{\smile}{AB}$ und $\underset{\frown}{AB}$ eingeschlossene Fläche mit $\varDelta F$. Zerlegen wir diese Fläche durch mehrere vom Mittelpunkt O ausgehende Radien in einzelne kleine Flächen (entsprechend der Fläche $CC'D'D$), so wird auch das Kurvenstück $\overset{\smile}{AB}$ in einzelne kleine Kurvenstücke zerlegt. Jedes dieser Kurvenstücke CD beschreibt bei seiner Verschiebung eine kleine Fläche $CC'D'D$, die von den Kurvenstücken CD und $C'D'$ sowie den Abschnitten CC' und DD' der entsprechenden Radien begrenzt wird. Die für die Ausführung einer solchen Verschiebung erforderliche Arbeit ist gleich dem Produkt aus $\frac{T}{R}$ und der vom Kurvenstück beschriebenen Fläche. Die bei der Verschiebung des ganzen Kurvenstückes $\overset{\smile}{AB}$ in die Lage $\underset{\frown}{AB}$ insgesamt verrichtete Arbeit ist gleich der Summe dieser Arbeiten, d. h. gleich dem Produkt aus $\frac{T}{R}$ und der Summe der einzelnen Teilflächeninhalte, also gleich $\frac{T}{R}\varDelta F$, wobei $\varDelta F$ der bei der Verschiebung des Kurvenstückes $\overset{\smile}{AB}$ beschriebene Flächeninhalt ist.

Die verrichtete Arbeit ist aber gleich dem bei der Verwandlung des Kurvenstückes $\overset{\smile}{AB}$ in $\underset{\frown}{AB}$ erfolgten Zuwachs $\varDelta V$ der potentiellen Energie,

$$\varDelta V \approx \frac{T}{R}\varDelta F. \tag{3}$$

Andererseits folgt aus Gleichung (2), § 11,

$$\varDelta V = T\varDelta l, \tag{4}$$

wobei $\varDelta l$ den Längenzuwachs bedeutet.

Werden die Ausdrücke (3) und (4) gleichgesetzt, so erhalten wir

$$\frac{T}{R}\varDelta F \approx T\,\varDelta l$$

oder

$$\varDelta l = \frac{1}{R}\varDelta F. \tag{5}$$

Der Zuwachs Δl des Kreisbogenstückes $\overset{\frown}{AB}$ ist somit gleich (genauer: äquivalent) dem Produkt aus der Krümmung $\frac{1}{R}$ und dem von $\overset{\frown}{AB}$ und $\underset{\frown}{AB}$ eingeschlossenen Flächeninhalt[1]).

2. *Änderung der Länge eines beliebigen Kurvenstückes.* Nehmen wir statt eines Kreises eine beliebige Kurve, so können wir ein kleines Stück $\overset{\frown}{AB}$ dieser Kurve als Bogen des Kreises mit dem Radius R betrachten (R = Krümmungsradius). Die Gleichung (5) bleibt gültig, wenn nun unter $\frac{1}{R}$ die Krümmung der Kurve in irgendeinem inneren Punkt des Stückes $\overset{\frown}{AB}$ verstanden wird.

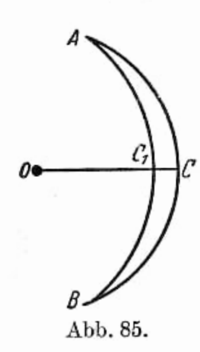


Abb. 85.

Ganz entsprechend verhält es sich im Falle von Flächenkurven. Hierbei tritt lediglich an Stelle der Krümmung $\frac{1}{R}$ die geodätische Krümmung Γ. Die Formel (5) bekommt dann die Gestalt

$$\Delta l = \Gamma \Delta F, \tag{6}$$

wobei Δl der beim Ersetzen des einen Kurvenstückes durch ein anderes benachbartes Stück erfolgte Längenzuwachs ist und ΔF den von beiden Kurvenstücken eingeschlossenen Flächeninhalt bezeichnet.

In Abb. 84 liegt die Fläche F außerhalb, in Abb. 85 innerhalb des zu AB gehörenden Kreises. Im letzten Falle geben wir dem Flächeninhalt F ein negatives Vorzeichen. Der Längenzuwachs l des Kreisbogenstückes wird ebenfalls negativ, d. h., wir erhalten statt einer Verlängerung eine Verkürzung des Kurvenstückes.

3. *Das isoperimetrische Problem.* Wir stellen uns nun die Aufgabe, *die kürzeste aller geschlossenen Kurven, die eine Fläche mit gegebenem Flächeninhalt F umgrenzen, zu bestimmen.*

Hierbei werde vorausgesetzt, daß eine solche Kurve überhaupt existiert. Wir werden zeigen, daß die gesuchte Kurve dann ein Kreis ist.

---

[1]) Alle hier angegebenen Gleichungen gelten bis auf solche Glieder, die im Vergleich zu Δl von höherer Ordnung klein werden.

Vorher bemerken wir noch, daß eine Kurve mit konstanter Krümmung $\left(\text{d. h. eine Kurve, deren Krümmung in allen Punkten gleich } \frac{1}{R} \text{ ist}\right)$ immer ein Kreis ist.

Der nachstehende Beweis erhebt nicht den Anspruch, in allen Teilen mathematisch exakt zu sein.

Ein sehr kleines Kurvenstück konstanter Krümmung $\frac{1}{R}$ kann als Stück eines Kreises mit dem Radius R angesehen werden. Wir denken uns die ganze Kurve in sehr viele solcher kleinen Kurvenstücke zerlegt. Zwei kleine benachbarte Kreisbogenstücke mit dem gleichen Radius bilden ein neues Kreisbogenstück, das denselben Radius hat. Jedes Paar der durch die Zerlegung unserer Kurven entstandenen benachbarten Kurvenstücke bildet in dieser Weise ein Kreisbogenstück mit dem Radius R. Setzen wir diese Überlegungen fort, so erkennen wir, daß auch die ganze Kurve ein Kreisbogenstück mit dem Radius R sein muß. Somit ist eine geschlossene Kurve der konstanten Krümmung $\frac{1}{R}$ ein Kreis mit dem Radius R.

Es sei q eine geschlossene Kurve, welche die kürzeste unter allen eine Fläche gegebenen Inhalts F umgrenzenden Kurven ist. Wir nehmen an, daß sie kein Kreis ist, d. h., daß ihre Krümmung nicht in allen Punkten gleich ist.

Die Krümmung habe in zwei Punkten A und B dieser Kurve (Abb. 86) etwa die Werte

$$\frac{1}{R_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{R_2} \quad (R_1 \neq R_2).$$

Der Bestimmtheit halber werde angenommen, daß

$$\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2}.$$

Abb. 86.

Es seien $\overset{\frown}{CD}$ und $\overset{\frown}{C_1D_1}$ zwei kleine Stücke von q, welche die Punkte A und B enthalten. Wir ersetzen das Stück $\overset{\frown}{CD}$ durch ein benachbartes Stück $\overset{\frown}{CA'D}$ und das Stück $\overset{\frown}{C_1D_1}$ durch ein benachbartes Stück $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$. Den Inhalt der von $\overset{\frown}{CD}$ und $\overset{\frown}{CA'D}$ begrenzten Fläche bezeichnen wir mit ΔF_1 und den Inhalt der von $\overset{\frown}{C_1D_1}$ und $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$ begrenzten Fläche mit ΔF_2. Nach Gleichung (5) erfährt die Kurve q beim Ersetzen des Stückes $\overset{\frown}{CD}$ durch das

Stück $\overset{\frown}{CA'D}$ einen Längenzuwachs, der gleich (genauer: äquivalent) $\frac{1}{R_1}\Delta F_1$ ist. Beim Ersetzen des Stückes $\overset{\frown}{C_1D_1}$ durch $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$ erfährt die Kurve q einen nochmaligen Längenzuwachs von $\frac{1}{R_2}\Delta F_2$. Die Gesamtvergrößerung der von q begrenzten Fläche ist gleich $\Delta F_1 + \Delta F_2$ und die Gesamtzunahme der Länge von q gleich (äquivalent)

$$\frac{1}{R_1}\Delta F_1 + \frac{1}{R_2}\Delta F_2 .$$

Wir wählen $\overset{\frown}{CA'D}$ und $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$ nun so, daß sich ΔF_1 und ΔF_2 lediglich in ihren Vorzeichen unterscheiden, d. h. bis auf ihre Vorzeichen gleichgroß sind. Es sei also etwa $\Delta F_1 > 0$ und $\Delta F_2 = -\Delta F_1 < 0$. Der Gesamtzuwachs wird dann gleich $\Delta F_1 + \Delta F_2 = 0$, d. h., der Flächeninhalt bleibt bei unserer Veränderung der Kurve q konstant. Der Längenzuwachs q ist aber gleich (äquivalent)

$$\Delta F_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Da nun

$$\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2}$$

ist, wird

$$\Delta F_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) < 0 .$$

Der Längenzuwachs der Kurve q ist somit negativ, d. h., q ist in eine kürzere Kurve q_1 übergegangen, die denselben Flächeninhalt begrenzt. Dies bedeutet aber, daß die Kurve q nicht die kürzeste aller eine Fläche gegebenen Inhalts F begrenzenden Kurven sein kann. Hieraus folgt: *Die kürzeste aller Kurven, die eine Fläche gegebenen Inhalts begrenzen, ist ein Kreis*[1]).

4. Das isoperimetrische Problem auf einer Fläche. Die gleiche Aufgabenstellung wie oben kann auch auf einer Fläche betrachtet

---

[1]) Eine Reihe anderer Beweise der isoperimetrischen Eigenschaften des Kreises findet man in dem Buch Д. А. Крыжановский, Изопериметры, максимальные и минимальные свойства геометрических фигур в общедоступном изложении (D. A. KRYSHANOWSKI, Isoperimetrie. Eine allgemeinverständliche Darstellung von Extremaleigenschaften geometrischer Figuren, Moskau-Leningrad 1938) sowie Л. А. Люстерник, Выпуклые тела (L. A. LJUSTERNIK, Konvexe Körper, Moskau-Leningrad 1941).

werden, wobei die Krümmung $\frac{1}{R}$ durch die geodätische Krümmung $\Gamma = \frac{\sin\varphi}{R}$ zu ersetzen ist. Wird z. B. ein kleines Stück $\overset{\frown}{CD}$ einer Kurve q mit der geodätischen Krümmung $\Gamma = \frac{\sin\varphi}{R}$ durch ein benachbartes Stück $\overset{\frown}{CA'D}$ ersetzt, und ist der von $\overset{\frown}{CD}$ und $\overset{\frown}{CA'D}$ begrenzte Flächeninhalt gleich ΔF, so ist der Längenzuwachs Δl, den die Kurve beim Ersetzen von $\overset{\frown}{CD}$ durch $\overset{\frown}{CA'D}$ erfährt, gleich

$$\Delta l = \Delta F \frac{\sin\varphi}{R} = \Gamma \cdot \Delta F .$$

Wiederholt man nun den oben geführten Beweis, so erhält man den folgenden Satz:

Die kürzeste aller geschlossenen Kurven auf einer Fläche, die eine Fläche gegebenen Inhalts begrenzen, besitzt in allen Punkten die gleiche geodätische Krümmung. (*Auf einer Kugeloberfläche sind dies die Groß- und Kleinkreise.*)

Anmerkung. Auf einer Kugeloberfläche wie in einer Ebene ist eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung ein geodätischer Kreis.

Auf anderen Flächen sind Kurven konstanter geodätischer Krümmung im allgemeinen keine geodätischen Kreise.

KAPITEL VI

DAS FERMATSCHE PRINZIP UND FOLGERUNGEN

§ 16. Das Fermatsche Prinzip

1. Das FERMAT*sche Prinzip.* Unsere obigen Überlegungen haben sehr viel Gemeinsames mit einer Reihe von Aufgaben der geometrischen Optik, die mit dem sogenannten FERMAT*schen Prinzip* zusammenhängen.

Wir betrachten ein ebenes optisches Medium, in dem das Licht in jedem Punkte $A\ (x, y)$ die Geschwindigkeit $v = v\ (x, y) = v\ (A)$ habe. Das Medium heißt *homogen,* wenn die Lichtgeschwindigkeit in allen Punkten gleich ist.

Die Zeit $T(q)$, in der die Kurve q bei einer Bewegung, deren Geschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, durchlaufen wird, heißt *optische Länge der Kurve* q.

In einem homogenen optischen Medium, in dem die Lichtgeschwindigkeit gleich v ist, ist die optische Länge $T(q)$ der Kurve q ihrer gewöhnlichen Länge $l\ (q)$ proportional, nämlich

$$T(q) = \frac{1}{v}\, l\ (q).$$

Das FERMATsche Prinzip. *In einem optischen Medium fällt die Bahn des Lichtes zwischen zwei Punkten A und B mit derjenigen Kurve zusammen, welche unter allen die Punkte A und B verbindenden Kurven die kleinste optische Länge hat.*

In einem homogenen optischen Medium breitet sich das Licht demnach geradlinig aus.

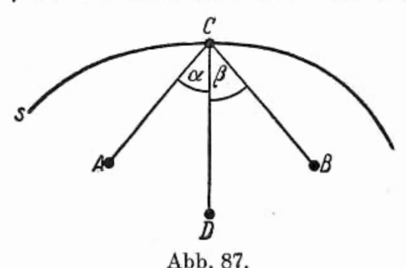


Abb. 87.

2. Das Reflexionsgesetz. In einem homogenen optischen Medium befinde sich eine Kurve s (Abb. 87), die einfallende Lichtstrahlen reflektiert, beispielsweise ein Spiegel. Wir wollen den Weg q_0 bestimmen,

den das Licht vom Punkte A zum Punkte B bei Reflexion an der Kurve s zurücklegt. Die Kurve q_0 ist die kürzeste aller die Punkte A und B verbindenden Kurven, die einer Reflexion an s entsprechen. Dies bedeutet, daß q_0 (vgl. § 5) der Streckenzug ACB ist, dessen Eckpunkt C so auf s liegt, daß die Halbierende CD des Winkels ACB gleichzeitig Normale von q im Punkte C ist.

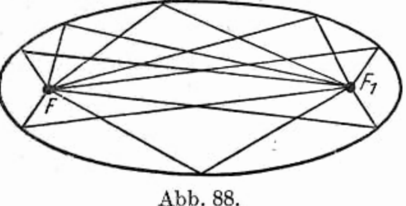


Abb. 88.

Die von den Strahlen AC und CB mit der Normalen CD gebildeten Winkel $\alpha = ACD$ und $\beta = DCB$ heißen entsprechend *Einfalls-* und *Ausfallswinkel.* Mit diesen Bezeichnungen läßt sich das DESCARTESsche *Reflexionsgesetz* folgendermaßen formulieren: *Der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel und beide liegen mit dem Einfallslot in derselben Ebene.*

Auf Grund der in § 11 bewiesenen Eigenschaften der Normalen von Ellipse und Parabel folgt:

Hat die Kurve s die Gestalt einer Ellipse, so werden alle von einem Brennpunkt F der Ellipse ausgehenden Strahlen (Brennstrahlen) so reflektiert, daß sie sich in dem anderen Brennpunkt F_1 *sammeln* (Abb. 88).

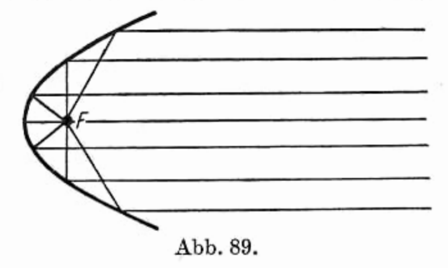


Abb. 89.

Hat die Kurve s die Gestalt einer Parabel, so werden alle vom Brennpunkt ausgehenden Strahlen parallel zur Achse der Parabel reflektiert. Umgekehrt sammeln sich alle parallel zur Achse einfallenden Strahlen nach der Reflexion im Brennpunkt der Parabel (Abb. 89).

Auf dieser Eigenschaft der Parabel beruht die Verwendung von Paraboloidspiegeln (Spiegel in der Form eines Rotationsparaboloides, d. h. der durch Rotation einer Parabel um ihre Achse erzeugten Fläche) für Scheinwerfer, Spiegelteleskope u. a.

3. Das Brechungsgesetz. Wir betrachten zwei homogene optische Medien I und II, die durch die Kurve s getrennt seien (vgl. Abb. 81). Die Lichtgeschwindigkeit sei im Medium I gleich

v_1 und im Medium II gleich v_2. Wir wollen den Weg des Lichtes $q_0 = \overset{\frown}{AB}$ von einem Punkt A im Medium I zu einem Punkt B im Medium II bestimmen.

Hierzu betrachten wir alle möglichen Kurven q, welche die Punkte A und B miteinander verbinden. Diese Kurven bestehen jeweils aus zwei Teilen $\overset{\frown}{AC}$ und $\overset{\frown}{CB}$, die entsprechend in den Medien I und II liegen, während C ein Punkt der Kurve s ist. Die optische Länge $T(q)$ einer Kurve q ist gleich

$$T(q) = T(\overset{\frown}{AC}) + T(\overset{\frown}{CB}) = \frac{l(\overset{\frown}{AC})}{v_1} + \frac{l(\overset{\frown}{CB})}{v_2}. \tag{1}$$

Die Kurve q_0 habe von allen Kurven q die kleinste optische Länge.

Wir nehmen einen elastischen inhomogenen Faden q, der in den Punkten A und B befestigt sei. Der Punkt C des Fadens sei auf der Kurve s verschiebbar, wobei die Spannkraft im Teil $\overset{\frown}{AC}$ von q durch $T_1 = \frac{1}{v_1}$, im Teil $\overset{\frown}{CB}$ durch $T_2 = \frac{1}{v_2}$ gegeben sei.

Für die potentielle Energie $V(q)$ des Fadens folgt aus der Gleichung (2) § 13

$$V(q) = \frac{l(\overset{\frown}{AC})}{v_1} + \frac{l(\overset{\frown}{CB})}{v_2}. \tag{2}$$

Durch Vergleich von (1) und (2) erhalten wir

$$T(q) = V(q).$$

Die potentielle Energie des Fadens q stimmt also mit seiner optischen Länge überein. Dies bedeutet aber, daß die Kurve q_0 mit der kleinsten optischen Länge unter allen Kurven q zugleich auch die Kurve mit der kleinsten potentiellen Energie unter allen Kurven ist.

Bei q_0 handelt es sich nach (4) § 13 um den Streckenzug AC_0B. Bezeichnen wir die von den Strecken AC_0 und C_0B mit der im Punkte C_0 an die Kurve s gelegten Tangente LL_1 gebildeten Winkel mit α und β, so gilt nach Gleichung (4) § 13

$$\frac{\cos\alpha}{v_1} = \frac{\cos\beta}{v_2}. \tag{3}$$

In dieser Gleichung ist das Brechungsgesetz des Lichtes enthalten. Wir bezeichnen die Komplementwinkel zu α und β, d. h. die von den Strecken AC_0 und C_0B mit der Normalen von s im Punkte C_0 gebildeten Winkel, mit α_1 und β_1. Der Winkel α_1 heißt

Einfallswinkel, der Winkel β_1 Ausfallswinkel. Gleichung (3) erhält mit diesen Bezeichnungen die Form

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \beta_1}{v_2}.$$

§ 17. Refraktionskurve

1. Der einfachste Fall. Eine Ebene werde durch Geraden, die zur x-Achse parallel verlaufen, in Streifen zerlegt. Die Lichtgeschwindigkeit sei innerhalb eines jeden Streifens konstant (Abb. 90). Wir greifen zwei Punkte A und B heraus, die in verschiedenen Streifen liegen. Der Streifen M_0 enthalte den Punkt A, der Streifen M_n den Punkt B. Zwischen beiden Streifen seien die Streifen $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ gelegen. Die Lichtgeschwindigkeit sei im Streifen M_0 gleich v_0, im Streifen M_1 gleich $v_1, \ldots$, im Streifen M_n gleich v_n. Ein vom Punkt A zum Punkt B gehender Lichtstrahl hat die Form des Streckenzuges $AC_1C_2 \ldots C_nB$, dessen Eckpunkte auf den die Streifen trennenden Parallelen liegen. Die von den Strecken AC_1, C_1C_2, $C_2C_3, \ldots$, $C_{n-2}C_{n-1}$, $C_{n-1}C_n$, C_nB dieses Streckenzuges und den zur x-Achse parallelen Geraden gebildeten Winkel bezeichnen wir entsprechend mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Nach dem Brechungsgesetz gilt im Punkt C_1

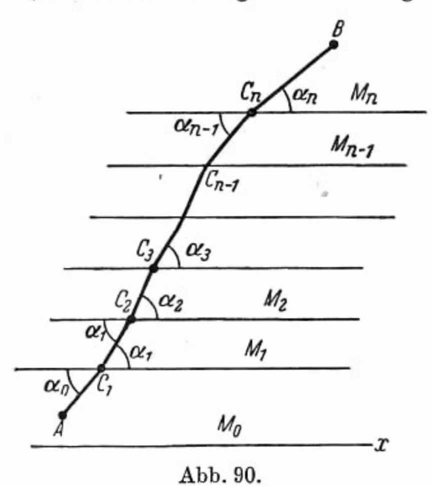


Abb. 90.

$$\frac{\cos \alpha_0}{v_0} = \frac{\cos \alpha_1}{v_1},$$

im Punkt C_2

$$\frac{\cos \alpha_1}{v_1} = \frac{\cos \alpha_2}{v_2}$$

usw., im Punkte C_n schließlich

$$\frac{\cos \alpha_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\cos \alpha_n}{v_n}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\cos\alpha_0}{v_0} = \frac{\cos\alpha_1}{v_1} = \frac{\cos\alpha_2}{v_2} = \cdots = \frac{\cos\alpha_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\cos\alpha_n}{v_n}. \tag{1}$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Wert der Quotienten mit c, so wird demnach

$$\frac{\cos\alpha}{v} = c, \tag{2}$$

wobei α der Neigungswinkel irgendeiner Strecke des Streckenzuges in bezug auf die x-Achse und v die Geschwindigkeit des Lichtes in dem zugehörigen Streifen ist.

Da die Tangente eines Streckenzuges in jedem Punkt mit der Geraden zusammenfällt, auf der der entsprechende Abschnitt des

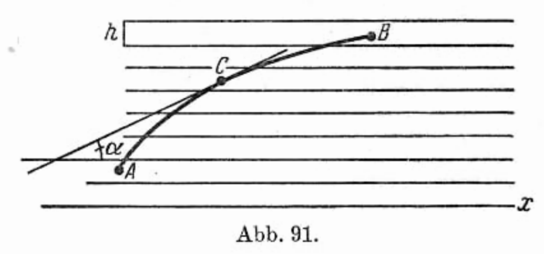


Abb. 91.

Streckenzuges liegt, bedeutet α in Gleichung (2) auch den Neigungswinkel der in einem Punkte an den Steckenzug gelegten Tangente zur x-Achse, wobei v die Lichtgeschwindigkeit in diesem Punkte ist.

2. Refraktionskurve. Betrachten wir nun ein optisches Medium, in dem die Geschwindigkeit des Lichtes in bestimmter Weise von der Ordinate abhängt; es sei also

$$v = v(y).$$

Dabei bezeichne v eine stetige Funktion von y. *Der Lichtweg q genügt in diesem Medium der Gleichung*

$$\frac{\cos\alpha}{v} = c, \tag{3}$$

wobei v die Lichtgeschwindigkeit in einem beliebigen Punkte C der Kurve q ist (Abb. 91) und α den Winkel bezeichnet, den die im Punkt C an q gelegte Tangente mit der Achse x bildet; c ist eine von der Wahl des Punktes C auf der Kurve unabhängige Konstante.

Um das Bestehen der Gleichung (3) nachzuweisen, zerlegen wir das Medium in schmale Streifen der Breite h und nehmen die Lichtgeschwindigkeit innerhalb eines jeden Streifens vorerst als konstant an, etwa gleich der Geschwindigkeit in der Mitte des Streifens (Abb. 91). Wie wir oben sahen, stellt der Lichtweg vom Punkte A zum Punkte B den Streckenzug $(AB)_h$ dar, dessen Eckpunkte auf den Trennlinien zwischen den einzelnen Streifen liegen. Für den Streckenzug $(AB)_h$ gilt dann aber die Gleichung (3).

Wir haben die Verteilung der Geschwindigkeiten etwas geändert. Je schmaler unsere Streifen sind, desto kleiner wird diese Änderung. Im Grenzfall, wenn die Breite h der Streifen gegen

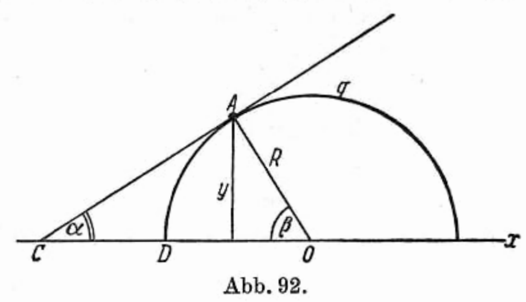


Abb. 92.

Null strebt, erhalten wir die ursprüngliche stetige Verteilung der Lichtgeschwindigkeit. Die Streckenzüge $(AB)_h$ streben dabei gegen eine Kurve q, für die ebenfalls die Gleichung (3) erfüllt ist.

3. Das POINCARÉ*sche Modell der* LOBATSCHEWSKI*schen Geometrie.* Wir betrachten die obere Halbebene, die von der x-Achse nach unten begrenzt wird, als optisches Medium, in dem die Lichtgeschwindigkeit v in jedem Punkte gleich der Ordinate y des Punktes ist,

$$v = y.$$

In diesem Medium breitet sich das Licht auf Halbkreisen aus, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen (Abb. 92).

Um dies einzusehen, betrachten wir einen Halbkreis q, dessen Mittelpunkt O auf der x-Achse liege. Ein Punkt A dieses Halbkreises habe die Ordinate y. Der Winkel ACO, den die Tangente im Punkte A mit der x-Achse bildet, sei gleich α. Ferner sei R der Radius des Halbkreises. Dann gilt

$$y = R \sin \beta,$$

wenn
$$\beta = \sphericalangle AOC = \frac{\pi}{2} - \alpha$$
ist. Hieraus folgt
$$y = R \cos \alpha$$
oder
$$\frac{\cos \alpha}{y} = \frac{1}{R}.$$

Der Halbkreis q genügt somit der Gleichung (3), d. h. der für unser Medium zutreffenden Gleichung des Lichtweges. Nähert man sich der x-Achse, so strebt die Geschwindigkeit y gegen Null.

Man kann zeigen, daß die optische Länge des Stücks AD des Halbkreises q, dessen einer Endpunkt D auf der x-Achse liegt, unendlich groß ist. Die auf der x-Achse liegenden Punkte werden wir daher *„unendlich fern“* nennen.

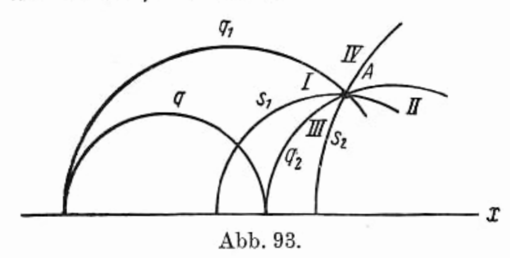


Abb. 93.

Alle Halbkreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen, betrachten wir als *„Geraden“*. Unter dem *Winkel*, den zwei dieser Geraden miteinander bilden, verstehen wir den Winkel, den ihre Tangenten im Schnittpunkt miteinander bilden. Unter der *Länge* eines Halbkreisstückes verstehen wir seine optische Länge.

Wir erhalten auf diese Weise eine ebene Geometrie, in der viele Sätze der gewöhnlichen Geometrie gültig bleiben. So können zwei Punkte stets durch eine und nur eine „Gerade“ verbunden werden (durch zwei Punkte der Halbebene kann nur ein Halbkreis, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, gezeichnet werden). Eine „Strecke“ hat unter allen Kurven mit denselben Endpunkten die kleinste „Länge“. Unter „Parallelen“ wird man naturgemäß zwei Geraden verstehen, die einen gemeinsamen „unendlich fernen Punkt“ besitzen (d. h. zwei Halbkreise, die sich auf der x-Achse, auf der auch ihre Mittelpunkte liegen, berühren). Durch einen gegebenen Punkt A, der nicht auf einer „Geraden“ q liegt, lassen sich zwei Geraden q_1 und q_2 zeichnen, die zu q parallel sind (Abb. 93).

Diese Geraden bilden vier „Winkel“ mit dem Scheitelpunkt A, wodurch die Halbebene in vier Sektoren geteilt wird. Jede durch den Punkt A verlaufende Gerade s_1, die innerhalb des ersten Scheitelwinkelpaares I und II liegt, schneidet die „Gerade“ q. Jede Gerade s_2, die innerhalb der Winkel III und IV liegt, schneidet q nicht.

Auf diese Weise haben wir ein Modell der LOBATSCHEWSKIschen Geometrie der Ebene, das sogenannte POINCARÉsche Modell, erhalten.

§ 18. Das Problem der Brachistochrone

1. Zykloide. Gegeben sei ein Kreis K mit dem Radius R, der auf einer Geraden L_1 abrollt. Diese Gerade nehmen wir als

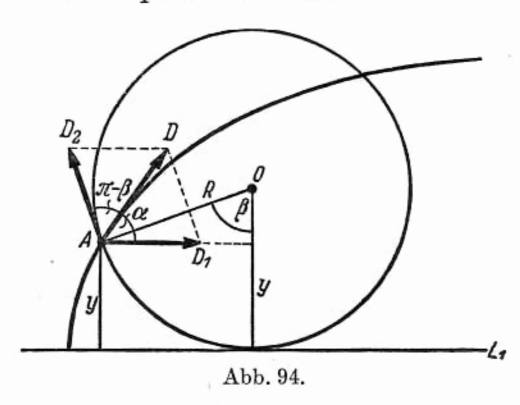


Abb. 94.

x-Achse (Abb. 94). Die Bewegung des Kreises setzt sich aus zwei Bewegungen zusammen: 1. aus der Drehbewegung um den Mittelpunkt O mit der Winkelgeschwindigkeit ω (die Bahngeschwindigkeit der Punkte auf der Kreisperipherie ist dann gleich $v = R\,\omega$); 2. aus der fortschreitenden Bewegung parallel zur Achse, die ebenfalls mit der Geschwindigkeit v erfolgt. Die dabei von einem Punkt A des Kreises beschriebene Kurve heißt *Zykloide.*

Im Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Punkt A auf der x-Achse (Abb. 94). Bis zum Zeitpunkt t hat sich der Kreis um den Winkel $\beta = t\,\omega$ gedreht. Die Ordinate y des Punktes A ist in diesem Augenblick gleich

$$y = R\,(1 - \cos\beta) = 2\,R\sin^2\frac{\beta}{2}. \tag{1}$$

Die Bewegungsrichtung des Punktes A fällt offenbar in jedem Zeitpunkt mit der Richtung der an die Zykloide gelegten Tangente zusammen.

Die Geschwindigkeit $T_1 = AD_1$ der parallel zur x-Achse fortschreitenden Bewegung sei v. Die Geschwindigkeit $T_2 = AD_2$ der Kreisbewegung ist ebenfalls gleich v und hat die Richtung der im Punkte A an den Kreis gelegten Tangente. Der Winkel D_1AD_2 ist gleich $(\pi - \beta)$. Die Geschwindigkeit des Punktes A auf der Zykloide findet man durch Addition dieser beiden Kräfte im Kräfteparallelogramm. Sie hat die Richtung der Halbierenden des Winkels D_1AD_2 und bildet mit der x-Achse den Winkel

$$\frac{1}{2}(\pi - \beta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$$

(Abb. 91). Für den Winkel α, den die im Punkte A an die Zykloide gelegte Tangente mit der x-Achse bildet, erhalten wir also

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\cos\alpha = \sin\frac{\beta}{2}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{y}{2R}}$$

oder

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}} = c. \tag{3}$$

Die Gleichung (3) setzt den Neigungswinkel α der Zykloidentangente im Punkt A in Beziehung zu der Ordinate y dieses Punktes. Umgekehrt ist jede Kurve, die diese Gleichung befriedigt, eine Zykloide.

2. Das Problem der Brachistochrone. Es seien A und B zwei Punkte, von denen B tiefer als A liege (Abb. 95). Wir verbinden die Punkte A und B durch eine Kurve q. Ein Punkt, der sich ohne Anfangsgeschwindigkeit, nur infolge der Schwerkraft vom Punkt A zum Punkt B bewegt, durchläuft die Kurve q in einer bestimmten Zeit, die wir *Fallzeit* auf der Kurve q nennen.

Es soll diejenige die Punkte A und B verbindende Kurve gefunden werden, für welche die Fallzeit vom Punkte A zum Punkte B am kleinsten ist (die sogenannte *Brachistochrone*).

In der vertikalen Ebene, in der die Punkte A und B liegen, nehmen wir die horizontale Gerade, auf der der Punkt A liegt, als x-Achse. Die y-Achse sei senkrecht nach unten gerichtet. Dann gilt zwischen der Geschwindigkeit v eines Punktes, der sich ohne Anfangsgeschwindigkeit, allein unter dem Einfluß der Schwerkraft bewegt, und der Ordinate y dieses Punktes die Beziehung

$$v^2 = 2\,g\,y$$

oder

$$v = \sqrt{2\,g}\,\sqrt{y}. \tag{4}$$

Wir stellen uns nun ein optisches Medium vor, in dem die Lichtgeschwindigkeit v durch die Gleichung (4) definiert ist. Die

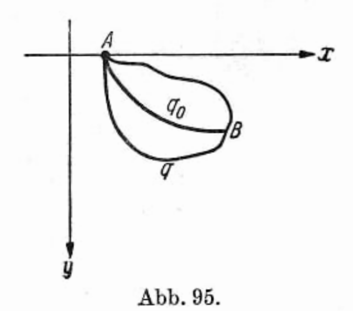


Abb. 95.

optische Länge der Kurve q ist dann die Fallzeit auf dieser Kurve. Da der Lichtweg q_0 vom Punkte A zum Punkte B unter allen Verbindungskurven der Punkte A und B die Kurve mit der kleinsten optischen Länge ist, ist q_0 eine Brachistochrone.

Für q_0 gilt (vgl. (3) § 17)

$$\frac{\cos\alpha}{v} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2\,g}\sqrt{y}} = c \qquad (c = \text{const})$$

oder

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}} = c_1 \qquad (c_1 = c\,\sqrt{2\,g}).$$

Hieraus folgt auf Grund der oben bewiesenen Zykloideneigenschaften (s. Gleichung (3)), daß eine Brachistochrone stets ein Stück einer Zykloide ist.

§ 19. Kettenlinien und die Bestimmung der kleinsten Rotationsfläche

1. Kettenlinien. Eine schwere homogene Kette (oder ein nicht dehnbarer Faden), die in zwei Punkten A und B festgehalten wird, nimmt unter dem Einfluß der Schwerkraft eine bestimmte Gleichgewichtslage ein. Dieser entspricht eine bestimmte Kurve, die *Kettenlinie* genannt wird (Abb. 96). (Eine Kette heiße homogen, wenn ihre Dichte ϱ konstant ist. Ein Stück der homogenen Kette von der Länge k hat dann die Masse $\varrho\, k$.)

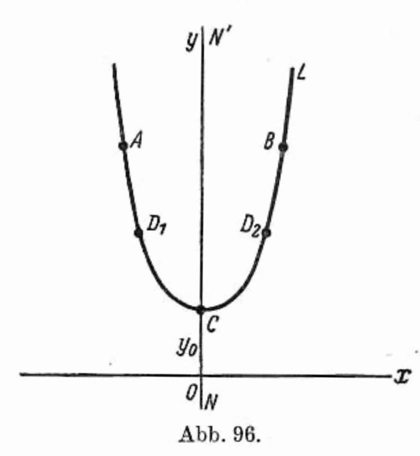


Abb. 96.

Wird die Kette $\overset{\smile}{AB}$ zusätzlich in den Punkten D_1 und D_2 festgehalten, so bleibt die Gleichgewichtslage des Teiles $\overset{\smile}{D_1D_2}$ der Kette unverändert. Die Kettenlinie $\overset{\smile}{AB}$ stellt also die Fortsetzung der Kettenlinie $\overset{\smile}{D_1D_2}$ dar. Nehmen wir an, daß die Kettenlinie zu beiden Seiten unbegrenzt ist, so ist $\overset{\smile}{AB}$ ein Teil einer *unendlichen Kettenlinie.*

Der Punkt C der Kettenlinie, der die tiefste Lage einnimmt, heißt *Scheitelpunkt* der Kettenlinie. Eine unendliche Kettenlinie liegt symmetrisch in bezug auf ihre senkrechte Achse NN', die durch den Scheitelpunkt C verläuft.

Wir werden im folgenden den rechten Teil $\overset{\smile}{CL}$ der Kettenlinie betrachten.

Es sei y die Ordinate eines mit D bezeichneten Punktes der Kettenlinie (Abb. 97), α der Winkel, den die in D angelegte Tangente mit der x-Achse bildet, und s die Länge des Bogens $\overset{\smile}{CD}$.

Die Kettenlinie werde in den Punkten C und D festgehalten. Die auf den Punkt D wirkende Kraft P, die sogenannte *Spannung* der Kette im Punkte D, hat die Richtung der in D an die Kettenlinie gelegten Tangente (Abb. 97). Die auf den Punkt C wirkende Kraft P_0 hat ebenfalls die Richtung der Tangente in C an die Kettenlinie, d. h., sie ist parallel zur x-Ache nach links gerichtet.

Die Resultierende T der auf das Kettenstück $\overset{\frown}{CD}$ wirkenden Schwerkräfte zeigt parallel zur x-Achse nach unten; die Masse des Bogens $\overset{\frown}{CD}$ mit der Länge s ist gleich $s\varrho$. Für die Kraft T gilt daher

$$T = g\varrho s, \tag{1}$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist. Für die senkrecht nach oben gerichtete Komponente der Kraft P erhalten wir

$$P \sin\alpha$$

und für die waagerecht nach rechts gerichtete Komponente

$$P \cos\alpha.$$

Würde die Kettenlinie erstarren, so bliebe ihre Gleichgewichtslage unverändert. Die auf die Kettenlinie wirkenden waagerechten Kräfte P_0 und $P\cos\alpha$ sowie die senkrechten Kräfte T und $P\sin\alpha$, die jeweils in entgegengesetzten Richtungen angreifen, heben sich gegenseitig auf. Aus Gleichung (1) folgt somit

$$P\sin\alpha = g\varrho s \tag{2}$$

und

$$P\cos\alpha = P_0. \tag{3}$$

Abb. 97.

Die Kette werde nun so auf der Kettenlinie verschoben, daß jeder Punkt ein Stück der Kettenlinie von der Länge h durchläuft. Die neue Lage der Kette sei $C'D'$. Es soll die Arbeit bestimmt werden, die für eine solche Verschiebung der Kette aufgewandt werden muß.

Die im Punkte D angreifende Kraft P verrichtet die Arbeit Ph, während P_0 im Punkte C die Arbeit $P_0 h$ leistet. Die insgesamt aufgewandte Arbeit ist damit gleich

$$R = (P - P_0)\,h. \tag{4}$$

In der Ausgangslage $\overset{\frown}{CD}$ besteht die Kette aus dem Stück $\overset{\frown}{C'D}$ und dem kleinen Zusatzstück $\overset{\frown}{CC'}$, in der Lage $\overset{\frown}{C'D'}$ aus dem Stück $\overset{\frown}{C'D}$ und dem kleinen Zusatzstück $\overset{\frown}{DD'}$. Die beiden Zu-

satzstücke $\overset{\frown}{CC'}$ und $\overset{\frown}{DD'}$ haben die gleiche Länge h und die gleiche Masse $\varrho\, h$. Die senkrechte Koordinate ist für das Stück $\overset{\frown}{CC'}$ gleich y_0 und für das Stück $\overset{\frown}{DD'}$ gleich y. Das Ergebnis der aufgewandten Arbeit besteht in der Ersetzung des kleinen Stückes $\overset{\frown}{CC'}$ mit der Ordinate y_0 durch das Stück $\overset{\frown}{DD'}$ mit der Ordinate y; beide Stücke haben die gleiche Masse. Für die aufgewandte Arbeit erhalten wir daher

$$R = g\,\varrho\, h\,(y - y_0). \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt:

$$P - P_0 = g\,\varrho\,(y - y_0)$$

oder

$$P - g\,y\,\varrho = P_0 - g\,\varrho\, y_0. \tag{6}$$

Wird die Kette längs der y-Achse parallel verschoben, so verändert sich weder die Gestalt der Kette noch die Kraft P in den einzelnen Punkten. Wir verschieben die Kettenlinie nun derart längs der y-Achse, daß die Ordinate y_0 den Wert

$$y_0 = \frac{1}{g\,\varrho} P_0 \tag{7}$$

annimmt. Man nennt diese Lage der Kettenlinie *Normal-* oder *Standardlage*. Wir werden später eine geometrische Definition der Normallage geben.

Gleichung (6) erhält in der Normallage die vereinfachte Form

$$P - g\,\varrho\, y = 0$$

oder

$$y = \frac{1}{\varrho\, g} P. \tag{8}$$

Für eine Kettenlinie, die sich in der Normallage befindet, ist in jedem Punkt die Spannung der Ordinate dieses Punktes proportional.

Aus Gleichung (3) folgt

$$\frac{1}{\varrho\, g} P \cos\alpha = \frac{1}{\varrho\, g} P_0.$$

Durch Einsetzen von (7) und (8) erhält man hieraus

$$y \cdot \cos\alpha = y_0. \tag{9}$$

Gleichung (9) beschreibt den Zusammenhang zwischen der Ordinate eines Punktes der Kettenlinie und dem Winkel α, den die Tangente in diesem Punkte mit der x-Achse bildet.

Vergleichen wir die Gleichung (9) mit der Gleichung der Refraktionskurve (vgl. (3) § 17), so erhalten wir folgenden Satz: *Eine Kettenlinie gibt in ihrer Normallage den Verlauf eines Lichtstrahles in einem Medium an, in dem die Lichtgeschwindigkeit v der Ordinate y umgekehrt proportional ist,*

$$v = \frac{c}{y}.$$

Der nächste Abschnitt bringt die bereits angekündigte geometrische Definition der Normallage einer Kettenlinie.

2. Geometrische Definition der Normallage einer Kettenlinie. Aus (2) und (8) folgt

$$\frac{1}{\varrho g} P \sin\alpha = s.$$

Ferner ist

$$s = y \sin\alpha.$$

Hieraus ergibt sich

$$y - s = y\,(1 - \sin\alpha).$$

Wegen (9) erhalten wir schließlich

$$y - s = y_0 \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

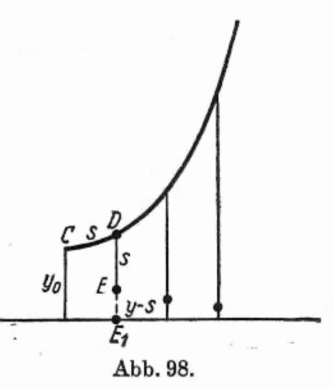


Abb. 98.

Ist $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (β ist der Winkel zwischen der Tangente an die Kettenlinie und der y-Achse), so gilt

$$y - s = y_0 \frac{1 - \cos\beta}{\sin\beta} = y_0 \frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = y_0 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \qquad (10)$$

Wir betrachten nun eine Strecke DE mit der Länge s (d. h. mit der Länge des Stückes $\overset{\frown}{CD}$ der Kettenlinie). Diese Strecke verlaufe parallel zur y-Achse (Abb. 98). Bleibt der Punkt C des Stückes $\overset{\frown}{CD}$ frei, während der Punkt D festgehalten wird, so nimmt das Stück $\overset{\frown}{CD}$ unter dem Einfluß der Schwerkraft die

senkrechte Strecke DE als neue Ruhelage ein. Wir sagen kurz: Das Stück $\overset{\frown}{CD}$ der Kette „fällt" in die Lage DE. Die senkrechte Strecke EE_1 der Länge $y - s$ zeigt die Entfernung des Endpunktes des „gefallenen" Stückes der Kette von der x-Achse an.

Aus (9) folgt

$$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{y_0}{y}. \tag{11}$$

Läuft der Punkt D unbegrenzt auf der Kettenlinie nach oben, so strebt seine Ordinate gegen den Wert Unendlich,

$$y \to \infty.$$

Wegen (11) strebt $\sin\beta$ hierbei gegen Null. Dies bedeutet aber, daß auch der Winkel β, den die Tangente im Punkte D mit der y-Achse bildet, gegen Null strebt. Da dann auch $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \to 0$, folgt aus (10) die Beziehung

$$\lim_{y\to\infty} (y - s) = 0.$$

Wandert der Punkt D auf der Kettenlinie unbegrenzt nach oben, so strebt der Abstand des Endpunktes E des gefallenen Stückes $\overset{\frown}{CD}$ der Kettenlinie von der x-Achse gegen Null.

In der Normallage der Kettenlinie erscheint die x-Achse als diejenige waagerechte Gerade, der sich der Endpunkt des gefallenen Stückes DE unbegrenzt nähert, wenn sich der Anfangspunkt des Stückes unbegrenzt von der x-Achse entfernt.

Durch diese Eigenschaft ist die Normallage einer Kettenlinie geometrisch charakterisiert.

3. Bestimmung der kleinsten Rotationsfläche. Es sei folgende Aufgabe gestellt:

Unter allen ebenen Verbindungskurven q zweier gegebener Punkte A und B ist die zu bestimmen, die durch Rotation um eine gegebene x-Achse die kleinste Rotationsfläche erzeugt (Abb. 99).

Der Flächeninhalt der durch Rotation der Kurve q um die x-Achse erzeugten Rotationsfläche werde mit $F(q)$ bezeichnet. Weiter sei $T(q)$ die optische Länge der Kurve q in einem Medium, in dem die Lichtgeschwindigkeit v durch die Gleichung

$$v = \frac{1}{2\pi y} \tag{12}$$

definiert ist.

Wir werden beweisen, daß diese beiden Größen miteinander übereinstimmen,

$$F(q) = T(q).$$

Es sei $\overset{\frown}{CD}$ ein kleines Stück der Kurve q, das die Länge h hat. Für dieses Stück ist

$$F(\overset{\frown}{CD}) = T(\overset{\frown}{CD}), \tag{13}$$

wie wir sogleich beweisen werden.

Betrachten wir $\overset{\frown}{CD}$ als Strecke, und ist y die Ordinate des Schwerpunktes von $\overset{\frown}{CD}$, so entspricht dem Inhalt der Rotationsfläche $F(\overset{\frown}{CD})$ die Mantelfläche eines Kegelstumpfes mit einer Erzeugenden der Länge h und dem mittleren Schnittkreisradius y, d. h., es wird

$$F(\overset{\frown}{CD}) = 2\pi y h.$$

Ist andererseits die Lichtgeschwindigkeit v im Mittelpunkt dieser kleinen Strecke (d. h. angenähert auch für die ganze Strecke) gleich $\frac{1}{2\pi y}$, so wird die optische Länge $T(\overset{\frown}{CD})$ gleich

$$T(\overset{\frown}{CD}) = \frac{h}{\frac{1}{2\pi y}} = 2\pi y h,$$

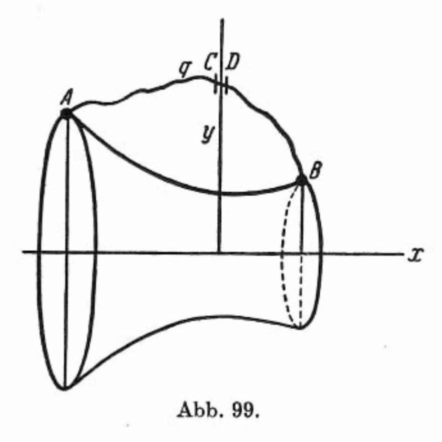


Abb. 99.

womit die Gleichung (13) bereits bewiesen ist.

Aus der Gleichheit der optischen Länge T und des Flächeninhalts F der durch Rotation um die x-Achse erzeugten Rotationsfläche für kleine Stücke der Kurve q folgt, daß diese Größen auch für die gesamte Kurve gleich sind. Wird für eine Kurve q der Wert $F(q)$ am kleinsten, so hat auch die optische Länge $T(q)$ für diese Kurve ihren kleinsten Wert. Nach dem FERMATschen Prinzip fällt die Kurve q mit dem Weg eines Lichtstrahls zusammen, der die Punkte A und B in unserem optischen Medium verbindet. Dieser Weg des Lichtes hat aber in unserem Medium die Form einer Kettenlinie (in der Normallage). Somit gilt:

Unter allen Kurven q, die zwei gegebene Punkte A und B verbinden, erzeugt diejenige Kurve q bei Rotation um die x-Achse die kleinste Rotationsfläche $F(q)$, welche die Gestalt der Kettenlinie AB (in Normallage) besitzt.

4. Minimalflächen. Ebenso wie das Problem der kürzesten Verbindung gegebener Punkte läßt sich auch die Frage nach der kleinsten Fläche, die von einer gegebenen Kurve r begrenzt wird, der sogenannten *Minimalfläche*, stellen.

Ist r eine ebene Kurve, so ist die von r begrenzte Fläche Q der Ebene auch die zu r gehörende Minimalfläche. Ist r jedoch keine ebene Kurve, so wird auch die Minimalfläche keine ebene Fläche sein.

Zwei Punkte A und B erzeugen bei Rotation um die x-Achse zwei Kreise r_1 und r_2, deren Mittelpunkte auf der Rotationsachse

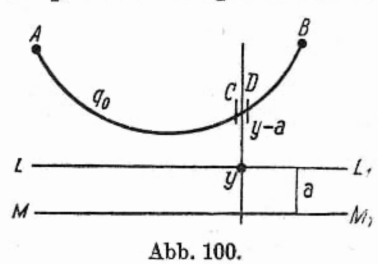


Abb. 100.

liegen. Die Ebenen dieser Kreise sind senkrecht zur Rotationsachse. Die durch Rotation der Kettenlinie $\overset{\frown}{AB}$, welche die Punkte A und B verbindet, erzeugte Rotationsfläche ist die von den Kreisen r_1 und r_2 begrenzte Minimalfläche.

5. Das isoperimetrische Problem der Bestimmung der kleinsten Rotationsfläche. Betrachten wir jetzt die folgende, etwas kompliziertere Aufgabe. Unter allen Kurven gegebener Länge l_0, die zwei Punkte A und B verbinden, ist diejenige zu bestimmen, die durch Rotation um eine Achse die kleinste Rotationsfläche erzeugt. Die Rotationsachse LL_1 liege waagerecht (Abb. 100).

Wir verbinden die Punkte A und B durch die Kettenlinie $\overset{\frown}{AB}$. Diese habe die gegebene Länge l_0. Als x-Achse nehmen wir die zur Rotationsachse LL_1 parallele Gerade MM_1, welche die Eigenschaft hat, daß sich die Kettenlinie $\overset{\frown}{AB}$ in bezug auf sie in der Normallage befindet.

Die durch Rotation der Kurve q um die x-Achse erzeugte Rotationsfläche bezeichnen wir mit $F_1(q)$, die durch Rotation der Kurve q um die Achse LL_1 erzeugte Rotationsfläche mit $F(q)$; die Länge der Kurve q sei $l(q)$. Ist a der Abstand der Achsen LL_1 und MM_1, so gilt

$$F(q) = F_1(q) - 2\pi a\, l(q). \tag{14}$$

Zum Beweis dieser Gleichung betrachten wir ein kleines Stück $\overset{\frown}{CD}$ der Kurve q, das die Länge h hat. Ist y der mittlere Abstand des Stückes $\overset{\frown}{CD}$ von der Achse MM_1, so ist der Abstand von der Achse LL_1 gleich $y - a$. Es ist $l(\overset{\frown}{CD}) = h$.

Weiter gilt

$$F_1(\overset{\frown}{CD}) = 2\pi h\, y, \qquad F(\overset{\frown}{CD}) = 2\pi h\,(y - a).$$

Da

$$2\pi h\,(y - a) = 2\pi h\, y - 2\pi h\, a$$

ist, folgt

$$F(\overset{\frown}{CD}) = F_1(\overset{\frown}{CD}) - 2\pi a\, l(\overset{\frown}{CD}). \tag{15}$$

Die Gleichung (14) gilt somit für jedes kleine Stück der Kurve q. Damit ist bewiesen, daß sie auch für die ganze Kurve gilt.

Uns interessieren die Kurven $\bar{q}$ der Länge l_0 ($l(\bar{q}) = l_0$), die die Punkte A und B verbinden. Für diese Kurven gilt

$$F(\bar{q}) = F_1(\bar{q}) - 2\pi l_0 a,$$

d. h., $F(\bar{q})$ und $F_1(\bar{q})$ unterscheiden sich um den konstanten Wert $2\pi l_0 a$. Beide Größen erreichen somit ihren kleinsten Wert für ein und dieselbe Kurve q_0. Die Kettenlinie q_0, die sich in bezug auf die x-Achse in der Normallage befindet, erzeugt bei Rotation um die x-Achse die Rotationsfläche mit dem kleinsten Inhalt $F_1(q)$ unter allen Verbindungskurven der Punkte A und B, insbesondere unter allen Kurven $\bar{q}$ der Länge l_0.

Das heißt, *die Kettenlinie q_0 erzeugt unter allen Kurven $\bar{q}$ der Länge l_0, die die Punkte A und B verbinden, die Rotationsfläche mit dem kleinsten Inhalt $F_1(\bar{q})$.*

Diese Eigenschaft der Kettenlinie läßt sich auch auf anderem Wege beweisen.

Wir betrachten nun die Gesamtheit aller Kurven $\bar{q}$ mit gegebener Länge, welche die Punkte A und B verbinden. Jede dieser Kurven wiederum betrachten wir als Lage einer homogenen schweren Kette mit der Dichte ϱ. Die durch die Schwerkraft

bedingte potentielle Energie der Kette werde in der Lage $\bar{q}$ mit $U(\bar{q})$ bezeichnet. Für die Kettenlinie $\bar{q} = q_0$ erreicht $U(\bar{q})$ den kleinsten Wert.

In der Tat folgt aus dem DIRICHLETschen Prinzip (s. § 11), daß die Kurve q_0, für die $U(\bar{q})$ den kleinsten Wert annimmt, die Gleichgewichtslage der Kette ist.

Als x-Achse werde wieder die waagerechte Gerade MM_1 genommen, die Dichte ϱ sei gleich 2π. Auf der Geraden MM_1 sei $U = O$. Ist y die mittlere Ordinate eines kleinen Stückes $\overset{\frown}{CD}$ der Länge h unserer Kette (Abb. 100), so gilt

$$U(\overset{\frown}{CD}) = \varrho\, h\, y = 2\pi\, h\, y .$$

Die Rotationsfläche, die sich durch Rotation des kleinen Stückes $\overset{\frown}{CD}$ um die Achse MM_1 ergibt, hat den Inhalt

$$V(\overset{\frown}{CD}) = 2\pi\, h\, y .$$

Hieraus folgt nun

$$U(\overset{\frown}{CD}) = V(\overset{\frown}{CD})$$

und schließlich

$$U(q) = V(q) .$$

Aus der Gleichheit der Größen U und V für jedes kleine Stück der Kurve q folgt nämlich ihre Gleichheit für die gesamte Kurve q. Die Kettenlinie, für die $U(\bar{q})$ unter allen die Punkte A und B verbindenden Kurven $\bar{q}$ mit gegebener Länge l ein Minimum annimmt, erzeugt somit die kleinste Rotationsfläche.

Größen, die von einer Kurve abhängen, heißen Funktionale. Beispielsweise sind die Größen $l(q)$, $V(q)$, $T(q)$, $U(q)$ Funktionale.

JACOB BERNOULLI stellte als erster das Problem, unter allen Kurven q mit gegebener Länge diejenige zu finden, für welche ein bestimmtes Funktional $J(q)$ den größten oder kleinsten Wert annimmt. Aufgaben dieser Art nannte er *isoperimetrische Aufgaben.* Der in § 15 betrachtete Spezialfall wird häufig *isoperimetrisches Problem im engeren Sinne* genannt. Ein anderes Beispiel haben wir gerade eben betrachtet.

§ 20. Zusammenhang zwischen Mechanik und Optik

Wir betrachten die Bewegung eines Punktes in einem ebenen Feld, d. h. in einem Medium, in dem Kräfte wirken. Hierbei soll

der Energieerhaltungssatz gelten, also

$$U + T = c,$$

wenn $U = U(x, y)$ die potentielle Energie, T die kinetische Energie und c die Gesamtenergie des Punktes bezeichnet. Setzen wir voraus, daß die Masse des Punktes gleich 1 ist, so ist

$$T = \frac{w^2}{2},$$

wobei w die Geschwindigkeit des Punktes bedeutet.

Hieraus und aus Gleichung (1) folgt

$$w = \sqrt{2\,T} = \sqrt{2(c - U)} = \sqrt{2\,[c - U(x, y)]}\,. \tag{2}$$

Wir betrachten nun alle möglichen Bahnkurven des Punktes. Die Gesamtenergie c habe hierbei einen festen Wert. Aus Gleichung (2) ist zu ersehen, daß die Geschwindigkeit w des Punktes allein durch seine Koordinaten x, y bestimmt wird, d. h. durch seine Lage im Kraftfeld.

Nehmen wir als Beispiel die Bewegung eines Punktes im Schwerefeld. Ist hierbei g die Schwerebeschleunigung und y die senkrechte Ordinate, so gilt $U = g\,y$. Aus Gleichung (2) folgt dann

$$w = \sqrt{2(c - g\,y)} = \sqrt{c_1 - c_2\,y} \quad (c_1 = 2\,c;\; c_2 = 2\,g). \tag{3}$$

Wir betrachten nun weiter ein optisches Medium, in dem die Geschwindigkeit v des Lichtes der mechanischen Geschwindigkeit w reziprok ist,

$$v = v(x, y) = \frac{1}{w(x, y)}. \tag{4}$$

Ist die Geschwindigkeit des Lichtes in einem Medium gleich $v = \frac{1}{w}$, *so sind die Lichtstrahlen die Bahnkurven der mechanischen Bewegung eines Punktes mit der Geschwindigkeit* $w = w(x, y)$.

Hierin ist die von HAMILTON gefundene Analogie zwischen Mechanik und Optik enthalten.

Wir wissen z. B., daß die Bahnkurven in einem Schwerefeld, in dem die Geschwindigkeit eines Punktes durch die Gleichung (3) bestimmt wird, Parabeln sind. Dementsprechend verlaufen Lichtstrahlen in einem optischen Medium parabelförmig, wenn die Geschwindigkeit gemäß $v = \frac{1}{\sqrt{c_1 - c_2\,y}}$ bestimmt ist.

Wir wissen ferner, daß Lichtstrahlen in Medien, in denen die Lichtgeschwindigkeiten v den Größen y, $\frac{1}{y}$, $\sqrt{y}$ proportional sind, entsprechend auf Halbkreisen mit den Mittelpunkten auf der x-Achse, auf Kettenlinien, auf Zykloiden verlaufen. Dieselben Linien sind somit die Bahnkurven der mechanischen Bewegung eines Punktes, dessen Geschwindigkeit entsprechend den Größen $\frac{1}{y}$, y, $\frac{1}{\sqrt{y}}$ proportional ist.

Zur Begründung dieses Zusammenhanges sei zunächst bemerkt, daß in einem Kraftfeld die Kräfte in Richtung der Normalen der sogenannten Äquipotentiallinien wirken. Dies sind diejenigen

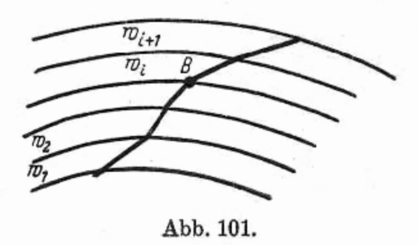


Abb. 101.

Linien, auf denen die potentielle Energie und damit (vgl. Gleichung (2)) die Geschwindigkeit w konstant ist,

$$U(x, y) = \text{const.}$$

Diese Kräfte sind nach der Seite kleinerer Werte der potentiellen Energie gerichtet. Wir betrachten nun ein System mehrerer nahe beieinander liegender Äquipotentiallinien. Auf jeder dieser Linien ist die Geschwindigkeit w konstant, während sie sich in dazwischen liegenden Streifen verändert. In Abb. 101 sind mit w_1, $w_2, \ldots, w_i, w_{i+1}, \ldots$ die Linien bezeichnet, auf denen die Geschwindigkeit entsprechend gleich $w_1, w_2, \ldots, w_i, w_{i+1}, \ldots$ ist.

Wir ersetzen jetzt die betrachtete Bewegung durch eine andere, bei der die Geschwindigkeit eines Punktes innerhalb jedes Streifens konstant bleibt. Die Geschwindigkeit innerhalb des von w_i und w_{i+1} begrenzten Streifens sei gleich w_i und gehe beim Übergang über die Linie w_{i+1} sprunghaft in die Geschwindigkeit w_{i+1} über. Je näher die betrachteten Äquipotentiallinien beieinander liegen (je schmaler die Streifen sind), desto geringfügiger wird die Abweichung von der wirklichen Geschwindigkeitsverteilung sein,

d. h., desto kleiner sind die sprunghaften Geschwindigkeitsänderungen. Strebt schließlich die Breite der Streifen gegen Null, so erhalten wir als Grenzfall die wirkliche Geschwindigkeitsverteilung im Medium.

Bei der sprunghaften Geschwindigkeitsverteilung erhalten wir statt der stetig in Richtung der Normalen der Linien $w = \text{const}$ wirkenden Kräfte Impulse, die senkrecht zu den Trennlinien wirken, an denen die sprunghaften Geschwindigkeitsänderungen eintreten. Innerhalb eines jeden Streifens wirken keinerlei Kräfte, und die Bewegung ist geradlinig. Die Bahnkurven sind

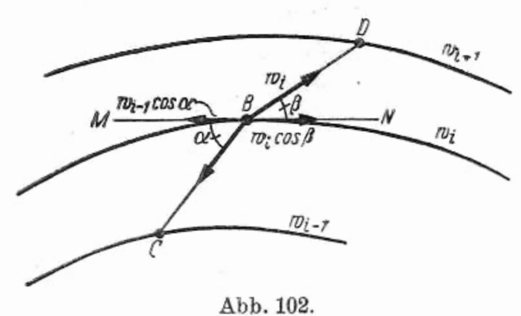


Abb. 102.

Streckenzüge, deren Eckpunkte auf den Trennlinien liegen. Wir nehmen ein Stück CBD einer solchen Bahnkurve (Abb. 102). Auf der Strecke CB ist die Geschwindigkeit gleich w_{i-1}.

Wir zeichnen die Tangente MN im Punkte B an die Trennlinie w_i und bezeichnen die von den Strecken CB und BD mit dieser Tangente gebildeten Winkel mit α und β. Im Punkt B sind die tangentialen Komponenten der Geschwindigkeiten bis zur Trennlinie bzw. nach der Trennlinie gleich

$$w_{i-1} \cos\alpha \quad \text{bzw.} \quad w_i \cos\beta .$$

Da der Impuls senkrecht zu der in B an die Trennlinie gelegten Tangente wirkt, hat er auf die tangentiale Komponente keinen Einfluß, d. h.

$$w_{i-1} \cos\alpha = w_i \cos\beta . \tag{5}$$

Gleichung (5) drückt das Gesetz der Brechung der Bahnkurve beim Übergang über eine Trennlinie aus.

Betrachten wir jetzt ein optisches Medium, in dem die Lichtgeschwindigkeit v der mechanischen Geschwindigkeit w umge-

kehrt proportional ist, $v = \frac{1}{w}$. In den benachbarten Streifen I und II ist die Lichtgeschwindigkeit somit gleich $v_{i-1} = \frac{1}{w_{i-1}}$ bzw. $v_i = \frac{1}{w_i}$. Nach dem Brechungsgesetz der Optik erhalten wir im Punkte B

$$\frac{\cos\alpha}{v_{i-1}} = \frac{\cos\beta}{v_i}$$

oder

$$w_{i-1}\cos\alpha = w_i\cos\beta.$$

Somit werden die Strahlen in unserem optischen Medium ebenso gebrochen wie die Bahnkurven im mechanischen Medium. In beiden Fällen erhalten wir dieselben Streckenzüge, die gleichzeitig und in gleicher Weise gebrochen werden, d. h., die Bahnkurven mit der Geschwindigkeit w_i im i-ten Streifen fallen mit Lichtstrahlen mit der Geschwindigkeit $v_i = \frac{1}{w_i}$ desselben Streifens zusammen. Für Medien, in denen sich die Geschwindigkeit sprunghaft ändert, ist unser Satz somit bewiesen.

Strebt die Breite der Streifen gegen Null, so erhalten wir im Grenzfall ein mechanisches Feld mit der Geschwindigkeit $w = w\,(x,\, y)$ und ein optisches Medium mit der Lichtgeschwindigkeit $v = v(x, y) = \frac{1}{w(x,\, y)}$. Die Bahnkurven und Strahlen gehen dabei in krummlinige Bahnkurven und Strahlen über, die dann ebenfalls zusammenfallen.

Der Zusammenhang zwischen Optik und Mechanik spielt in der modernen Physik eine bedeutende Rolle.

Abschließend sei bemerkt, daß allgemeine Lösungsmethoden zur Bestimmung der Maxima und Minima von Funktionalen Inhalt einer besonderen mathematischen Disziplin sind, nämlich der *Variationsrechnung*. Die Grundlagen dieser Disziplin wurden von L. Euler und J. Lagrange, den bedeutenden Mathematikern des XVIII. Jahrhunderts, geschaffen.



